Többváltozós függvények integrálja.

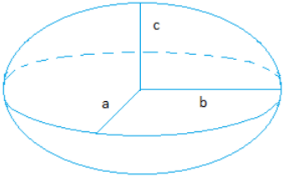
4. rész.

2018. április 23.

Kettős integrál alkalmazása

Térfogatszámítás.

Egy ellipszoid $S = \left\{(x, y, z) :\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$.



Legyen $R = \{(x, y) :\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$, ekkor

$$S = \left\{(x, y, z) :\ (x, y) \epsilon R,\ |z| \leq c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\right\}.$$

Így a fél ellipszoid térfogata $\iint\limits_R c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, d(x, y)$.

A fél térfogat: $\frac{1}{2}V = c\iint\limits_R \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\, d(x,y).$

Új koordinátákat vezetünk be, τ és θ:

$$x = \tau\, a\cos\theta, \quad y = \tau\, b\sin\theta, \qquad \tau\epsilon[0,1],\ \theta\epsilon[0,2\pi)$$

A koordináta transzformáció Jacobi determinánsa

$$\frac{d(x,y)}{d(\tau,\theta)} = \det\begin{pmatrix} a\cos\theta & -\tau a\sin\theta \\ b\sin\theta & \tau b\cos\theta \end{pmatrix} = ab\tau.$$

Ezért a fél-térfogat, (és mivel $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\tau^2$),

$$\frac{1}{2}V = c\int_0^1\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\tau^2}\,ab\tau\; d\theta d\tau = abc\,2\pi\cdot\left[-\frac{(1-\tau^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\frac{1}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\pi abc.$$

Kitekintés a hármas integrálokra

Háromdimenziós intervallum, ismétlés

Tegyük fel, hogy $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, azaz

$$R = \{(x, y, z) : \ x \epsilon [a_1, b_1], \ y \epsilon [a_2, b_2], z \ \epsilon [a_3, b_3]\}, \quad a_k, b_k \epsilon \mathbb{R}.$$

Legyen $f : R \to \mathbb{R}$ integrálható függvény.

Tétel.

A fenti feltételek mellett

$$\iiint_R f(x, y, z) \, d(x, y, z) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \, dy \, dx.$$

Az integrálások sorrendje felcserélhető.

Hármas integrál normáltartományon. Ismétlés

Tétel.

Adott $R = \{(x,y,z)\ :\ (x,y)\epsilon S,\ F_1(x,y) \le z \le F_2(x,y)\}$.

$f : R \to \mathbb{R}$ *integrálható függvény. Ekkor*

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \iint\limits_S \left(\int\limits_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) d(x,y).$$

Speciálisan, ha $S = [a,b] \times [c,d]$, *akkor*

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \int\limits_a^b \int\limits_c^d \left(\int\limits_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dy\,dx.$$

Koordináta transzformáció

Új koordinátarendszer: (x, y, z) helyett (u, v, w).

$$x = \Phi(u, v, w), \quad y = \Psi(u, v, w), \quad z = \Lambda(u, v, w).$$

A transzformáció $F : (u, v, w) \mapsto (x, y, z)$.

Tfh F differenciálható, és Jacobi mátrixa nemszinguláris,

$D(u, v, w) = \det J(u, v, w) \neq 0$.

Egy $R \subset \mathbb{R}^3$ tartomány ősképe $R' \subset \mathbb{R}^3$:

$$R' = \{(u, v, w) : \; F(u, v, w) \epsilon R\}.$$

Integrál transzformáció

Tétel.

$R \subset \mathbb{R}^3$, és $f : R \to \mathbb{R}$ integrálható. $\iiint\limits_R f(x,y,z)d(x,y,z) =?$

Az integrálban helyetesítünk: (x,y,z) *helyett* (u,v,w)*:*

$$x = \Phi(u,v,w), \quad y = \Psi(u,v,w), \quad z = \Lambda(u,v,w).$$

A fenti feltételekkel az integrál az új koordinátákban így írható

$$= \iiint\limits_{R'} f(\Phi(u,v,w), \Psi(u,v,w), \Lambda(u,v,w))\ D(u,v,w)\ d(u,v,w).$$

ahol $R' = \{(u,v,w) :\ F(u,v,w) \epsilon R\}$.

Gömbi polár transzformáció, példa.

Számoljuk ki az egységgömb térfogatát.

$$\iiint\limits_R 1 \; d(x,y,z) = V, \qquad R = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}.$$

A gömbi koordináták r, φ, θ, az áttérés $x = r \sin\varphi \; \cos\theta$,

$y = r \sin\varphi \; \sin\theta$, $z = r \cos\varphi$.

A Jacobi determináns $D(r,\varphi,\theta) = r^2 \sin\varphi$.

A gömbi koordinátákkal R' téglalap-tartomány:

$$R' = \{r \leq 1, \; 0 \leq \varphi < \pi, \; 0 \leq \theta < 2\pi\} = [0,1] \times [0,\pi] \times [0,2\pi).$$

$$\Longrightarrow \quad V = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\varphi \; d\theta \; d\varphi \; dr = 2\pi \int_0^1 r^2 \, dr \int_0^\pi \sin\varphi \; d\varphi = \frac{4\pi}{3}.$$

Improprius kettős integrálok

Nem korlátos függvény integrálja

$R \subset \mathbb{R}^2$ tartomány mérhető. Tfh $f : R \to \mathbb{R}$ folytonos, kivéve néhány pontot, ahol nincs véges határértéke.

$R_1 \subset R_2 \subset \ldots R_n \subset \ldots \subset R$ olyan tartománysorozat, hogy

- f folytonos az R_n tartományon
- $\lim\limits_{n\to\infty} A(R_n) = A(R)$.

Definíció.

f IMPROPRIUS ÉRTELEMBEN INTEGRÁLHATÓ, *ha létezik*

$$I = \lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} f(x, y)d(x, y),$$

és ez független az (R_n) *halmaz-sorozat megválasztásától.*

Tétel.

Tegyük fel, hogy van egy olyan (R_n) *halmaz-sorozat, amelyre*

- f *folytonos* R_n*-en,*
- $R_n \subset R_{n+1}$ *minden* n*-re,*
- $\lim_{n\to\infty} A(R_n) = A(R)$,
- *és* $\iint_{R_n} |f(x,y)|d(x,y) < M$, *valamely* n*-től független* M *valós számra.*

Ekkor f *improprius értelemben integrálható.*

Példa. Hatványfüggvény integrálja

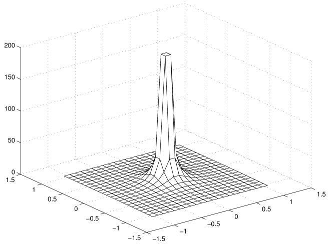
Legyen

$$f(x,y) = \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha}, \qquad \alpha > 0$$

és az integrálási tartomány

$$R = \{(x,y):\ 0 < x^2+y^2 \le 1\}.$$

f nincs értelmezve $(0,0)$-ban, és környezetében nem korlátos.



Az R tartományt közelítsük az alábbi módon:

$$R_n = \{(x, y) : \frac{1}{n} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}.$$

Ekkor

$$\iint_{R_n} f(x, y) d(x, y) = \int_{1/n}^{1} \int_{0}^{2\pi} r^{-\alpha} r d\theta\, dr = 2\pi \cdot \int_{1/n}^{1} \frac{1}{r^{\alpha-1}} dr <$$

$$< 2\pi \int_{0}^{1} \frac{1}{r^{\alpha-1}}\, dr.$$ Ez akkor konvergens, ha $\alpha - 1 < 1$, azaz $\alpha < 2$.

Következmény. A hatványfüggvény $\alpha < 2$ esetben improprius értelemben integrálható a lyukas egységkörön.

Elégséges feltétel improprius integrál létezésére

Tétel.

Tfh $f : R \to \mathbb{R}$ *folytonos, és nem korlátos valamely* $(x_0, y_0) \epsilon R$ *pont környezetében (pl ez az origó).*

Tfh $\exists \alpha$, $0 < \alpha < 2$ *és* $\exists M > 0$, *melyre*

$$|f(x, y)| \leq \frac{M}{(\sqrt{x^2 + y^2})^\alpha}, \quad \forall (x, y) \epsilon R.$$

Ekkor f improprius értelemben integrálható.

Improprius integrál nem korlátos tartományon

Adott R nem korlátos, és $f : R \to \mathbb{R}$ folytonos függvény.

Tfh van olyan $R_1 \subset R_2 \subset \dots R_n \subset \dots \subset R$ mérhető tartománysorozat, melyre $\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n = R$.

Ekkor $\forall n$-re véges az integrál: $\iint\limits_{R_n} f(x, y) d(x, y)$.

Definíció.

Ha létezik $\lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{R_n} f(x, y) d(x, y)$ *és független az* (R_n) *halmaz-sorozat megválasztásától, akkor* f IMPROPRIUS ÉRTELEMBEN INTEGRÁLHATÓ, *és*

$$\iint\limits_{R} f(x, y)\, dR = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{R_n} f(x, y)\, dR_n.$$

Példa. Hatványfüggvény integrálja

Legyen $f(x,y) = \dfrac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha}$, $\alpha > 0$ és

$$R = \{(x,y):\ 1 \geq x^2 + y^2\}.$$

Az integrálási tartomány nem korlátos.

R közelítése: $R_n = \{(x,y) : 1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq n\}$.

$$\iint\limits_{R_n} f(x,y)d(x,y) = \int_1^n \int_0^{2\pi} r^{-\alpha} r d\theta\, dr = 2\pi \cdot \int_1^n \frac{1}{r^{\alpha-1}} dr < 2\pi \cdot \int_1^\infty \frac{1}{r^{\alpha-1}}\, dr$$

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{r^{\alpha-1}}\, dr$ akkor konvergens, ha $\alpha - 1 > 1$, azaz $\alpha > 2$.

Elégséges feltétel improprius integrál létezésére

Tétel.

R olyan nem korlátos tartomány, melynek lezárása az origót nem tartalmazza. Tfh $f : R \to \mathbb{R}$ függvényhez $\exists \alpha > 2$ és $M > 0$

$$|f(x,y)| \leq \frac{M}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha}, \quad \forall (x,y) \epsilon R.$$

Ekkor f improprius értelemben integrálható.

Bizonyítás. Következik abból a tényből, hogy a fenti tartományon $\alpha > 2$ esetén a hatványfüggvény improprius értelemben integrálható.

Elégséges feltétel, általános eset

Tétel.

Tfh van olyan $R_1 \subset R_2 \subset \dots R_n \subset \dots \subset R$ *mérhető tartománysorozat, melyre* $\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n = R$, *és* $\exists M > 0$*:*

$$\iint_{R_n} |f(x,y)| d(x,y) \le M \quad \forall n.$$

Ekkor f improprius értelemben integrálható, és minden (S_n) *tartománysorozat esetén, a fenti feltételekkel:*

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{S_n} f(x,y) d(x,y) = \iint_R f(x,y)\, d(x,y).$$

Példa.

$f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$, az integrálási tartomány $R = \mathbb{R}^2$.

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, d(x, y) = ?$$

Közelítő tartomány-sorozat: $R_n = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq n^2\}$.

Polárkoordinátákkal: $R'_n = \{(r, \theta)\} = [0, n] \times [0, 2\pi)$

$$\iint\limits_{R_n} e^{-x^2-y^2}\, d(x, y) = \iint\limits_{R'_n} e^{-r^2}\, r\, d(r, \theta) = 2\pi \int_0^n e^{-r^2} r\, dr =$$

$$= 2\pi \left[\frac{-e^{-r^2}}{2} \right]_0^n$$

$$\iint_{R_n} e^{-x^2-y^2} d(x,y) = 2\pi \left[\frac{-e^{-r^2}}{2} \right]_0^n$$

Így az improprius integrál értéke:

$$\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2} d(x,y) = 2\pi \lim_{n\to\infty} \frac{1-e^{-n^2}}{2} = \pi.$$

Más közelítő tartományok: $S_m = \{(x,y) : |x| \leq m, |y| \leq m\}$.

$$\Longrightarrow \quad S_1 \subset \cdots \subset S_m \subset \ldots \mathbb{R}^2, \qquad \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m = \mathbb{R}^2.$$

$S_m = [-m, m] \times [-m, m]$. Így

$$\iint\limits_{S_m} e^{-x^2-y^2} d(x,y) = \int\limits_{-m}^{m} e^{-x^2} dx \int\limits_{-m}^{m} e^{-y^2} dy = \left(\int\limits_{-m}^{m} e^{-x^2} dx \right)^2 .$$

Másrészt

$$\lim_{m\to\infty} \iint\limits_{S_m} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y) = \iint\limits_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y) = \pi$$

Ebből azonnal következik:

$$\lim_{m\to\infty} \left(\int\limits_{-m}^{m} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi \quad \Longrightarrow \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$