Többváltozós függvények integrálja.

3. rész.

2018. április 19.

Kettős integrál

Kettős integrál téglalap alakú tartományon. Ismétlés

Ha $R = [a, b] \times [c, d]$ téglalap-tartomány, $f : R \to \mathbb{R}$

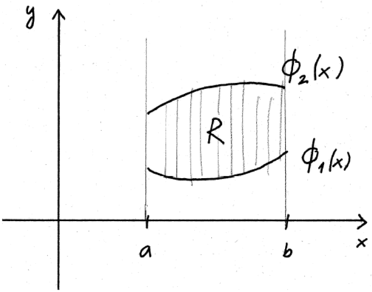
integrálható függvény, akkor

$$\iint_R f(x, y)\ dR = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right)\ dx.$$

$$\iint_R f(x, y)\ dR = \int_d^c \left(\int_a^b f(x, y) dx \right)\ dy.$$

Tehát, ebben az esetben *"Kettős" integrál = "Kettő" integrál*.

Integrálás normáltartományon, ismétlés.



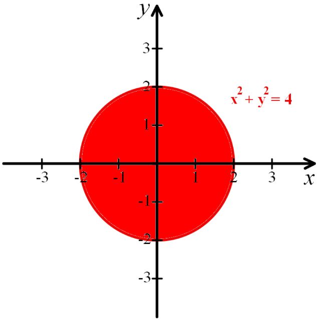
Tétel.

R egy x szerinti normáltartomány. f integrálható R-en. Ekkor

$$\iint_R f(x,y)\,dR = \int_a^b \left(\int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx,$$

Példa, ismétlés

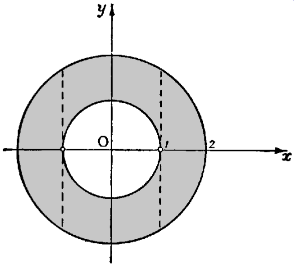
Legyen R egy kör, $R = \{(x, y): \ \ x^2 + y^2 \leq 4\}$.



Ez egy normáltartomány. Ekkor

$$\iint\limits_R f(x,y)\, d(x,y) = \int\limits_{-2}^{2} \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\, dy\, dx.$$

Körgyűrű alakú tartomány

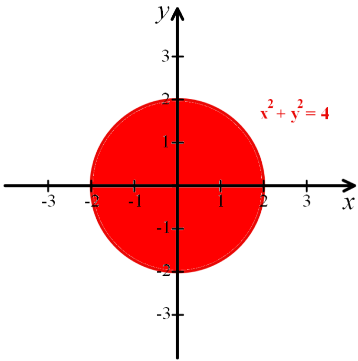


$$R = \{(x,y) :\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}.$$

$$\iint_R f(x,y)\,dR = \int_{-2}^{-1} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dydx + \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx +$$

$$+ \int_{-1}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dydx + \int_{1}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dydx.$$

Kör alakú tartomány másképp



$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dxdy$$

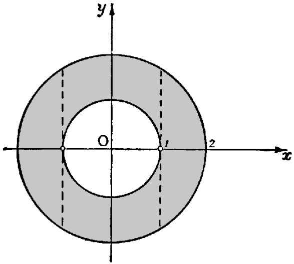
$$R = \{(x,y):\ 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4]\}.$$

Polárkoordinátákban:

$$R = \{(r,\theta):\ 0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta < 2\pi\} = [0,\ 1] \times [0,\ 2\pi).$$

TÉGLALAP

Körgyűrű alakú tartomány másképp



$$R = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Polárkoordinátákban:

$$R = \{(r, \theta) : 1 \leq r \leq 2, \; 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

$$R = [1, 2] \times [0, 2\pi).$$

TÉGLALAP

Koordináta transzformáció

Helyettesítés integrálban. Ismétlés

Tétel.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrálható függvény. $\phi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ szigorúan monoton és differenciálható, ($x = \phi(t)$),

$$\phi(\alpha) = a, \qquad \phi(\beta) = b.$$

Ekkor

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

Általánosítás kettős integrálra?

Előkészület. Homogén lineáris transzformáció

Tekintsünk egy homogén lineáris transzformációt:

$$\begin{aligned} x &= au + bv \\ y &= cu + dv \end{aligned}$$

Tömören:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Feltesszük, hogy $\det T \neq 0$, ekkor a leképezés egy-egyértelmű.

Terület változás

$R \subset \mathbb{R}^2$ tartomány képe $R' = T(R)$.

Állítás.

Ha R mérhető, akkor $A(R') = \det(T) \cdot A(R)$.

Megjegyzés. Ha a homogén lineáris transzformációt így írjuk

$$\begin{aligned} x &= \Phi(u,v) = au + bv \\ y &= \Psi(u,v) = cu + dv, \end{aligned}$$

akkor $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = J(u,v)$, a Jacobi mátrix.

$$\det(T) = \det J(u,v) = D(u,v).$$

Általános transzformáció, terület változása

Tekintsünk egy koordináta transzformációt:

$$x = \Phi(u, v), \qquad y = \Psi(u, v).$$

Tfh a Jacobi mátrix nem szinguláris, azaz $D(u, v) \neq 0$.

Tétel.

Legyen $R \subset \mathbb{R}^2$ mérhető, ennek ősképe

$$R' = \{(u, v) : \ x = \Phi(u, v), y = \Psi(u, v), (x, y) \epsilon R\}.$$

Ekkor R' is mérhető, és $A(R') = \iint\limits_{R'} D(u, v) d(u, v).$

$$A(R) = \iint\limits_{R} 1 \ d(x, y) \qquad \Longrightarrow \qquad A(R') = \iint\limits_{R'} D(u, v) d(u, v)$$

Integrál transzformáció kettős integrálban

Tétel.

$R \subset \mathbb{R}^2$, $f : R \to \mathbb{R}$ *integrálható. Adott egy koordináta transzformáció:* $x = \Phi(u, v)$, $y = \Psi(u, v)$.

Tfh Jacobi mátrixa nem szinguláris.

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} \Phi'_u(u, v) & \Phi'_v(u, v) \\ \Psi'_u(u, v) & \Psi'_v(u, v) \end{pmatrix}, \quad D(u, v) \neq 0$$

R az új koordinátákban: $R' = \{(u, v) : \ (\Phi(u, v), \Psi(u, v)) \epsilon R\}$.

Ekkor

$$\iint\limits_{R} f(x, y) d(x, y) = \iint\limits_{R'} f\big(\Phi(u, v), \Psi(u, v)\big) D(u, v) d(u, v).$$

Speciális eset: polárkoordináták

(x, y) helyett az új koordináták (r, θ), ahol

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

A Jacobi determináns:

$$D(r,\theta) = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

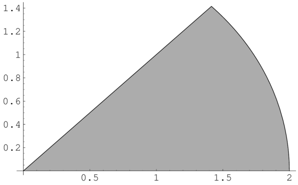
Így a megfelelő integrál transzformáció:

$$\iint\limits_R f(x,y)d(x,y) = \iint\limits_{R'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, d(r,\theta).$$

$$R' = \{(r,\theta) : \ (r\cos\theta,\ r\sin\theta)\epsilon R\}$$

Példa. $f(x,y) = x^2 - y^2$.

R egy nyolcadkör.



$$\iint_R (x^2 - y^2)\, d(x,y) = ?$$

Polárkoordinátákkal: $R' = \{(r,\theta) : \ 0 \le r \le 2, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\}$.

R az (r,θ) koordinátákban TÉGLALAP. Ekkor

$$\iint_R (x^2 - y^2)\, d(x,y) = \int_0^2 \int_0^{\pi/4} r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\, r\, d\theta\, dr =$$

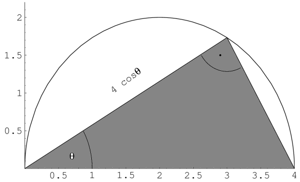
$$= \int_0^2 r^3\, dr \cdot \int_0^{\pi/4} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\, d\theta = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 \cdot \left[\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/4} = 2.$$

Polár transzformáció, példa.

Legyen $f(x, y) = xy$. Az integrálási tartomány egy félkör:

$$R = \{(x, y) : (x-2)^2 + y^2 \leq 4,\ \ y \geq 0\}$$

.



Polárkoordinátákban

$$R' = \{(r, \theta) :$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ \ 0 \leq r \leq 4\cos\theta\}.$$

Ez θ szerinti NORMÁLTARTOMÁNY. Így

$$\iint\limits_R xy \; d(x, y) = \int\limits_0^{\pi/2} \left(\int\limits_0^{4\cos\theta} (r \cdot \cos\theta)\,(r \cdot \sin\theta) \cdot r \;\; dr \right) d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=4\cos\theta} \cos\theta \;\sin\theta \; d\theta = 64 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta \;\sin\theta \; d\theta = \frac{32}{3}.$$

Hármas integrál

Az integrál értelmezése

Tekintsük egy három dimenziós $S \subset \mathbb{R}^3$ tartományt.

Legyen $f : S \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z)$ egy ezen értelmezett függvény.

A kettős integrálhoz hasonlóan értelmezhető a

$$\iiint\limits_S f(x, y, z)d(x, y, z)$$

hármas integrál.

1. lépés. A Jordan-mérték: Külső és belső közelítésekkel, egyre kisebb oldalú kockákkal történik. Jelölés: $V(S)$.

2. lépés. Az integrál értelmezése

S korlátos tartomány, $f : S \to \mathbb{R}$ korlátos függvény.

S egy felosztása: $S = S_1 \cup \ldots \cup S_n$, ahol $\mathrm{int}\, S_i \cap \mathrm{int}\, S_j = \varnothing$.

$(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \epsilon S_i$. A felosztáshoz tartozó RIEMANN ÖSSZEG:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) V(S_i).$$

f INTEGRÁLHATÓ, ha $\exists \lim\limits_{\substack{n \to \infty, \\ \max(\delta(S_i)) \to 0}} I_n$, és ftlen a felosztásoktól.

Ekkor ez a határérték a hármas integrál:

$$\iiint\limits_S f(x, y, z)\, d(x, y, z).$$

A hármas integrál fizikai interpretációja: tömeg.

Adott egy szilárd test, melyet az S térrész határoz meg.

Ennek sűrűsége pontonként változik.

Az (x, y, z) pontbeli sűrűség $f(x, y, z)$. Ekkor a test tömege:

$$\iiint_S f(x, y, z)d(x, y, z)$$

Speciálisan, $f(x, y, z) \equiv 1$ esetén a térfogat mérőszámát kapjuk.

Háromdimenziós intervallum

Tegyük fel, hogy $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, azaz

$$R = \{(x, y, z) : \ x \epsilon [a_1, b_1], \ y \epsilon [a_2, b_2], z \ \epsilon [a_3, b_3]\}, \quad a_k, b_k \epsilon \mathbb{R}.$$

R zárt és korlátos. Legyen $f : R \to \mathbb{R}$ integrálható függvény.

Tétel.

A fenti feltételek mellett

$$\iiint\limits_R f(x, y, z) \, d(x, y, z) = \int\limits_{a_1}^{b_1} \int\limits_{a_2}^{b_2} \int\limits_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \, dy \, dx.$$

Az integrálások sorrendje felcserélhető.

Normáltartomány

Legyen $S \subset \mathbb{R}^2$ mérhető tartomány az (x, y) síkon.

Definíció.

Az R tartomány (z szerinti) NORMÁLTARTOMÁNY*, ha a következő alakú:*

$$R = \{(x, y, z) \ : \ (x, y) \epsilon S, \ F_1(x, y) \leq z \leq F_2(x, y)\},$$

ahol $F_1, \ F_2 : S \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, melyekre $F_1(x, y) \leq F_2(x, y)$ minden $(x, y) \epsilon S$ esetén.

Tétel.

Adott $R = \{(x, y, z) \ : \ (x, y) \epsilon S, \ F_1(x, y) \le z \le F_2(x, y)\}$.

$f : R \to \mathbb{R}$ *integrálható függvény. Ekkor*

$$\iiint\limits_R f(x, y, z)\, d(x, y, z) = \iint\limits_S \left(\int\limits_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) d(x, y).$$

Speiálisan, ha $S = [a, b] \times [c, d]$, *akkor*

$$\iiint\limits_R f(x, y, z)\, d(x, y, z) = \int\limits_a^b \int\limits_c^d \left(\int\limits_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dy\, dx.$$