Többváltozós függvények integrálja.

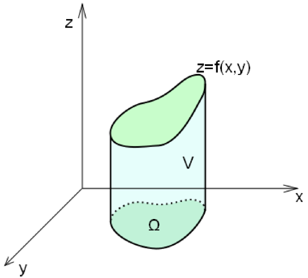
2. rész.

2018. április 16.

Riemann integrál szemléletesen, ismétlés

$R \subset \mathbb{R}^2$ mérhető, zárt halmaz. $f : R \to \mathbb{R}^+$ folytonos függvény.

Mekkora az $f(x,y)$ felület alatti térrész térfogata, $V = V(S)$?



$$S = \{(x,y,z) : \ (x,y) \epsilon R, \ 0 \leq z \leq f(x,y)\}$$

A kettős integrál definíciója, ismétlés

Definíció.

$f : R \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $R \subset \mathbb{R}^2$ mérhető és korlátos.

R egy felosztása: $R = R_1 \cup \ldots \cup R_n$, ahol $\operatorname{int} R_i \cap \operatorname{int} R_j = \emptyset$.

Legyen $(\xi_i, \eta_i) \epsilon R_i$.

A felosztáshoz tartozó RIEMANN-FÉLE KÖZELÍTŐ ÖSSZEG*:*

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot A(R_i).$$

f RIEMANN-INTEGRÁLHATÓ, *ha létezik:* $\lim\limits_{\substack{n\to\infty,\\ \max \delta(R_i)\to 0}} V_n = V.$

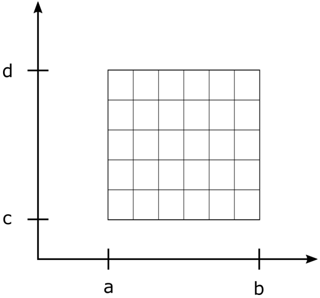
Jelölés: $\iint\limits_R f(x,y)\; dR = \iint\limits_R f(x,y)\, d(x,y).$

A kettős integrál. Speciális eset.

R téglalap. $R = [a, b] \times [c, d]$.

Az $[a, b]$-t osszuk n részre, a $[c, d]$ intervallumot m részre. A felosztás elemszáma $N = nm$.

A részintervallumok hossza $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ ill. $\Delta y = \dfrac{d-c}{m}$.

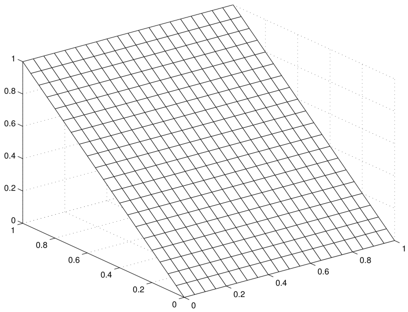


A közelítő összeg

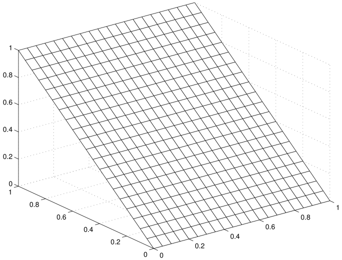
$$V_N = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x \Delta y.$$

A kettős integrál, példa

$R = [0,1] \times [0,1]$, $f(x,y) = x$.



A kiszámítandó tartomány egy félkocka. (Látjuk: $V = \dfrac{1}{2}$)



$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} x \, d(x,y) = ?$$

Egyenletes felosztás, $N = n^2$. Az (i,j)-dik résztartomány

$$R_{ij} = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right] \qquad A(R_{ij}) = \frac{1}{n^2}$$

. A Riemann összegben legyen $f_{i,j} = x_i$.Így

$$V_N = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n^2} \frac{i}{n} = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \quad \to \frac{1}{2}.$$

Kettős integrál intervallumon

$R = [a, b] \times [c, d]$. Tfh f szeparálható, $f(x, y) = \Phi(x) \cdot \Psi(y)$.

$$\iint_R \Phi(x)\Psi(y)\, d(x, y) = ?$$

Egyenletes felosztással:

$$V_N = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)\Delta x\, \Delta y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \Phi(\xi_i)\Psi(\eta_j)\Delta x\, \Delta y =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Phi(\xi_i)\Delta x \cdot \sum_{j=1}^{m} \Psi(\eta_j)\Delta y.$$

Tehát, ebben az esetben *"Kettős" integrál = "Kettő" integrál*:

$$V_N \to \iint_R \Phi(x)\Psi(y)\, d(x, y) = \int_a^b \Phi(x)dx \cdot \int_c^d \Psi(y)dy.$$

Példa

Az integrálandó függvény $f(x, y) = e^{x-y}$.

Az integrálási tartomány $R = [0, 1] \times [1, 2]$.

Ekkor

$$\iint_R e^{x-y}\, d(x, y) = \int_0^1 e^x dx \int_1^2 e^{-y} dy =$$

$$= (e - 1) \cdot \left[-(e^{-2} - e^{-1}) \right].$$

Tulajdonságok. I.

Állítás. Tegyük fel, hogy f integrálható R-en. Ekkor

1. $\forall c \in \mathbb{R}$ esetén $c\,f$ integrálható, és

$$\iint\limits_R cf(x,y)\,dR = c\iint\limits_R f(x,y)\,dR.$$

2. Ha f és g integrálható R-en, akkor $f+g$ is, és

$$\iint\limits_R (f+g)\,dR = \iint\limits_R f\,dR + \iint\limits_R g\,dR.$$

Tulajdonságok. II.

3. Ha $R = R_1 \cup R_2$, ahol R_1, R_2 nem átfedőek, akkor

$$\iint_R f(x,y)\,d(x,y) = \iint_{R_1} f(x,y)\,d(x,y) + \iint_{R_2} f(x,y)\,d(x,y).$$

3a. Ha $A(R_2) = 0$, akkor: $\displaystyle\iint_R f(x,y)\,d(x,y) = \iint_{R_1} f(x,y)\,d(x,y)$.

$$\iint_{R_2} f(x,y)\,d(x,y) = 0.$$

4. Ha $f \geq 0$, akkor

$$\iint\limits_R f(x, y)\, dR \geq 0.$$

5. Ha $f(x, y) \geq g(x, y)$, $\forall (x, y) \epsilon R$-re , akkor

$$\iint\limits_R f(x, y)\, dR \geq \iint\limits_R g(x, y)\, dR.$$

Következmény. (Háromszög-egyenlőtlenség.)

$$\iint\limits_R |f(x, y)|\, dR \geq \left| \iint\limits_R f(x, y)\, dR \right|.$$

Bizonyítás. $|f(x, y)| \geq f(x, y)$ és $|f(x, y)| \geq -f(x, y)$.

Integrál középértéktétel

Tétel.

1. *Tegyük fel, hogy* $m \leq f(x, y) \leq M$, $\forall (x, y) \epsilon R$ *esetén. Ekkor*

$$m \cdot A(R) \leq \iint_R f(x, y)\, dR \leq M \cdot A(R).$$

2. *Tegyük fel továbbá, hogy* f *folytonos is, valamint* R *zárt és összefüggő. Akkor* $\exists (\xi, \eta) \epsilon R$, *hogy*

$$\iint_R f(x, y)\, dR = f(\xi, \eta) \cdot A(R).$$

Bizonyítás

1. $m \leq f(x,y) \quad \Longrightarrow \quad \iint\limits_R m\, d(x,y) \leq \iint\limits_R f(x,y)\, d(x,y).$

   Továbbá $\iint\limits_R m\, d(x,y) = m \cdot A(R)$.

2. A W2 tétel miatt $\exists (x_1, y_1)$ és $\exists (x_2, y_2)$, melyekre

   $$m = \min_R f(x,y) = f(x_1, y_1), \qquad M = \max_R f(x,y) = f(x_2, y_2).$$

   Jelölje

   $$\kappa := \frac{1}{A(R)} \iint\limits_R f(x,y)\, dR \quad \Longrightarrow \quad f(x_1, y_1) \leq \kappa \leq f(x_2, y_2).$$

   A Bolzano tétel szerint $\exists (\xi, \eta)$, melyre $f(\xi, \eta) = \kappa$.

Integrálás téglalap alakú tartományon

$R = [a, b] \times [c, d]$ és $f : R \to \mathbb{R}$ integrálható függvény.

Tétel.

$\forall y \epsilon [c, d]$ esetén értelmezzük ezt a függvényt:

$$\Phi(y) := \int_a^b f(x, y)dx$$

Ekkor $\Phi : [c, d] \to \mathbb{R}$ integrálható és

$$\int_c^d \Phi(y)dy = \iint_R f(x, y)\, dR.$$

Fordítva is igaz, ha $\forall x \epsilon [a, b]$ esetén definiáljuk

$$\Psi(x) := \int\limits_c^d f(x, y) dy,$$

akkor $\Psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrálható: $\int\limits_a^b \Psi(x) dx = \iint\limits_R f(x, y)\, dR$.

Tehát ha $R = [a, b] \times [c, d]$ téglalap-tartomány, akkor

$$\iint\limits_R f(x, y)\ dR = \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x, y)\, dy\ dx = \int\limits_c^d \int\limits_a^b f(x, y)\, dx\ dy.$$

Megjegyzés. Az integrál kiértékelése ”belülről-kívülre” megy,

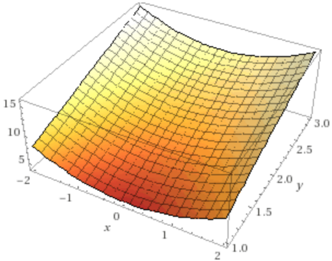
$$\int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x, y)\, dy\ dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y) dy \right)\ dx.$$

Példa

Legyen $f(x,y) = x^2 + 4y$, és $R = [-2,2] \times [1,3]$. Ekkor

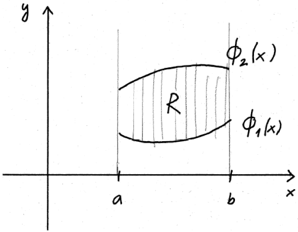
$$\int_{-2}^{2}\int_{1}^{3}(x^2+4y)\,dy\,dx = \int_{-2}^{2}\left[x^2y+2y^2\right]_{y=1}^{y=3}dx =$$

$$= \int_{-2}^{2}(2x^2+16)dx = 2\left(\frac{16}{3}+32\right).$$



Fordított sorrendben integrálva: ugyanez az eredmény.

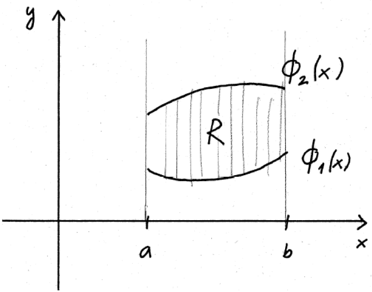
Integrálás normáltartományon I.



Definíció.

Egy $R \subset \mathbb{R}^2$ halmaz x szerinti normáltartomány, ha: $\exists [a, b]$ *és* $\exists \Phi_1, \Phi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ *szakaszonként folytonos függvények, melyekre* $\Phi_1 \leq \Phi_2$*,*

$$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ \Phi_1(x) \leq y \leq \Phi_2(x)\}.$$

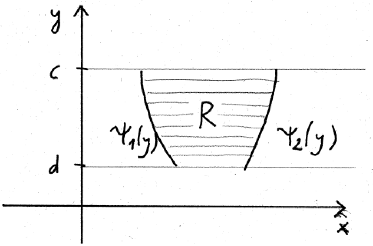


Tétel.

R egy x szerinti normáltartomány. f integrálható R-en. Ekkor

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dR = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx,$$

Integrálás normáltartományon II.

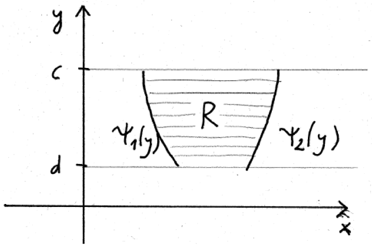


$R \subset \mathbb{R}^2$ *y* szerinti normáltartomány, ha

$\exists [c, d]$ és $\exists \Psi_1, \Psi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ függvények, $\Psi_1 \leq \Psi_2$, melyekre

$$R = \{(x, y) : c \leq y \leq d,\ \Psi_1(y) \leq x \leq \Psi_2(y)\}.$$

(Az ábrán *c* és *d* fel vannak cserélve.)



Tétel.

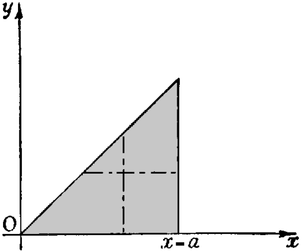
f integrálható R-en, ahol R y -szerinti normáltartomány. Ekkor

$$\iint_R f(x,y)\,d(x,y) = \int_c^d \left(\int_{\Psi_1(y)}^{\Psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

(Az ábrán c és d fel vannak cserélve.)

Példa

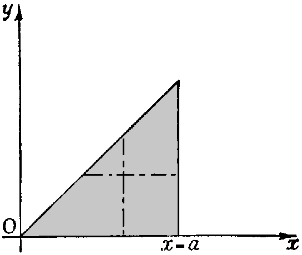
R háromszög alakú tartomány, csúcsai: $(0,0)$, $(a,0)$ és (a,a).



Ekkor R mindkét változó szerint normáltartomány, éspedig

$$R = \{(x,y) : 0 \le x \le a, \ \ 0 \le y \le x\},$$

$$R = \{(x,y) : 0 \le y \le a, \ \ y \le x \le a\}.$$



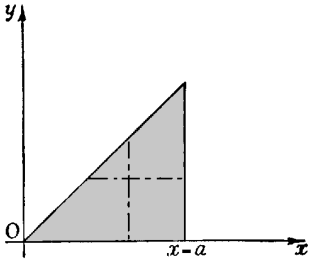
Adott $f : R \to \mathbb{R}$, ezen értelmezett függvény. Ekkor

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dR = \int_0^a \int_0^x f(x,y)dy\ dx = \int_0^a \int_y^a f(x,y)dx\ dy.$$

Ha speciálisan $f(x,y) = \phi(y)$ alakú, akkor

$$\int_0^a \int_y^a \phi(y)dx\ dy = \int_0^a \phi(y)(a-y)dy.$$

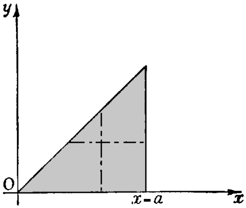
Példa. Határozzuk meg $f(x,y) = xy$ integrálját a háromszög-tartományon:



$$\iint_R xy\, d(x,y) = \int_0^a \left(\int_0^x xy\, dy \right) dx = \int_0^a \left(x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=x} \right) dx =$$

$$= \int_0^a \frac{x^3}{2}\, dx = \frac{a^4}{8}.$$

Tipikus hibák!



$$\iint\limits_R f(x,y)\,dR = \int_0^a \left(\int_0^x f(x,y)dy \right) dx.$$

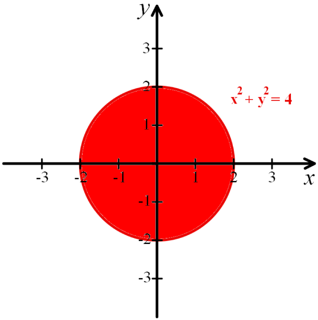
$$\iint\limits_R f(x,y)\,dR = \int_0^a \left(\int_y^a f(x,y)dx \right) dy.$$

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dR = \int_0^a \int_0^{\cancel{a}} f(x,y)dy\ dx.$$

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dR = \int_0^{\cancel{x}} \int_y^a f(x,y)dx\ dy.$$

Példa

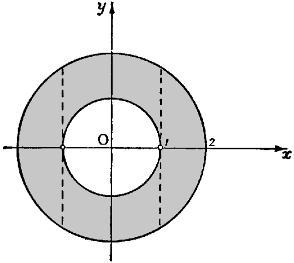
Legyen R egy kör, $R = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 \leq 4\}$.



Ekkor

$$\iint_R f(x, y)\, d(x, y) = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\, dy\, dx.$$

Körgyűrű alakú tartomány



Legyen R körgyűrű:

$$R = \{(x, y):\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4]\}.$$

$$\iint\limits_R f(x, y)\, dR = \int\limits_{-2}^{-1} \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy dx + \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx +$$

$$+ \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy dx + \int\limits_{1}^{2} \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy dx.$$