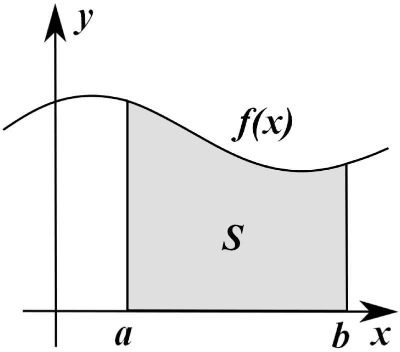
Integrálszámítás. 1. rész.

2018. április 12.

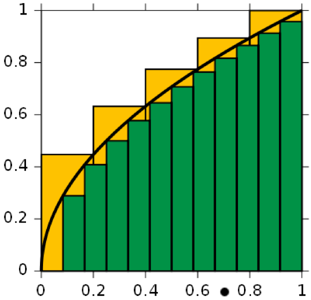
Területszámítás

$f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ korlátos függvény.

Mennyi a függvény grafikonja és az x tengely közti terület?



Riemann integrál, ismétlés



$\mathbb{F}$: Az összes lehetséges felosztás.

Legyenek

$$s = \sup\{s(\mathcal{F}) \ : \ \mathcal{F} \epsilon \mathbb{F}\}, \qquad S = \inf\{S(\mathcal{F}) \ : \ \mathcal{F} \epsilon \mathbb{F}\}.$$

Ekkor $s \leq S$.

Riemann integrál, ismétlés

Definíció.

Ha $s = S$*, akkor az* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *korlátos függvény*

RIEMANN - INTEGRÁLHATÓ*.*

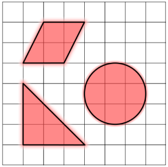
A függvény Riemann integrálja

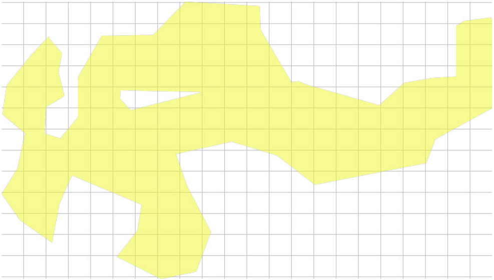
$$\int_a^b f(x)dx = s = S.$$

Jordan mérték $\mathbb{R}^2$-ben

Kérdés: $\mathbb{R}^2$ bizonyos korlátos részhalmazainak mértéke?

$\approx$ Területszámítás.





Mekkora a területe?

Jordan mérték $\mathbb{R}^2$-ben

$R \subset \mathbb{R}^2$ esetén a mértéket $A(R)$ fogja jelölni. *Mit várunk?*

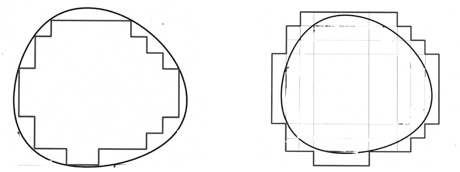
1. $A(R) \geq 0$
2. Ha R egy δ oldalú négyzet, akkor mértéke legyen
   $A(R) = \delta^2$.
3. Ha
   $$R_1 \cap R_2 \subset \partial R_1 \cup \partial R_2,$$
   (azaz a közös pontok csak határon lehetnek), akkor :
   $$A(R_1 \cup R_2) = A(R_1) + A(R_2).$$

Jordan mérték $\mathbb{R}^2$-ben

Adott egy $R \subset \mathbb{R}^2$ tetszőleges korlátos halmaz.

0. lépés. Tekintsük a sík négyzetrácsos felosztását az

$x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ és $y = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ egyenesekkel.



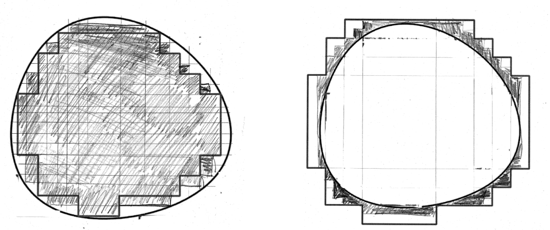
$A_0^-(R)$: azon négyzetek területe, melyek benne vannak R-ben.

$A_0^+(R)$: azon négyzetek területe melyek nem diszjunktak R-től.

Nyilván $A_0^-(R) \leq A_0^+(R)$.

Jordan mérték $\mathbb{R}^2$-ben

1. lépés. Finomítjuk a felosztást, a négyzetrács oldalait megfelezzük.



$A_1^-(R)$ azon négyzetek területe, melyek benne vannak R-ben

$A_1^+(R)$ azon négyzetek területe, melyek nem diszjunktak R-től.

Jordan mérték $\mathbb{R}^2$-ben

És így tovább.

Az *n-dik lépés*ben a négyzetek oldala $1/2^n$. Definiáljuk:

$$A_n^-(R), \qquad A_n^+(R)$$

$(A_n^-(R))$ monoton növő és felülről korlátos, ezért létezik

$$A^-(R) = \lim_{n\to\infty} A_n^-(R).$$

$(A_n^+(R))$ monoton fogyó és alulról korlátos, tehát létezik

$$A^+(R) = \lim_{n\to\infty} A_n^+(R).$$

Jordan mérték $\mathbb{R}^2$-ben

$$A_n^-(R) \leq A_m^+(R) \quad \forall n, m, \qquad \Longrightarrow \qquad A^-(R) \leq A^+(R).$$

Definíció.

Ha $A^-(R) = A^+(R)$*, akkor az* R *halmaz* JORDAN MÉRHETŐ*, és Jordan mértéke*

$$A(R) := A^+(R) = A^-(R).$$

Jordan mérték $\mathbb{R}^2$-ben

Példa nem mérhető halmazra.

$$R := \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1,\ x, y \epsilon \mathbf{Q}\}.$$

Ekkor $A_n^-(R) = 0$, hiszen ...

Másrészt $A_n^+(R) = 1$, hiszen ...

$A^+(R) \neq A^-(R)$ tehát a halmaznak nincs mértéke.

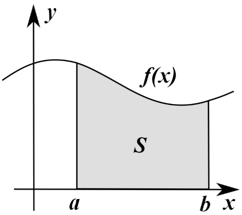
Jordan mérték $\mathbb{R}^2$-ben

A Jordan mérték kiterjesztése a korábbi a terület-fogalomnak:

Állítás. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ integrálható függvény.

$$S = \{(x, y) : a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}.$$

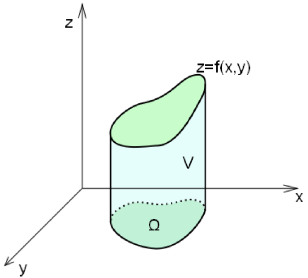
Ekkor $A(S) = \int_a^b f(x)dx.$



Riemann integrál kétváltozós függvényekre

$R \subset \mathbb{R}^2$ mérhető, zárt halmaz. $f : R \to \mathbb{R}^+$ folytonos függvény.

Mekkora az $f(x, y)$ felület alatti térrész térfogata, $V = V(S)$?

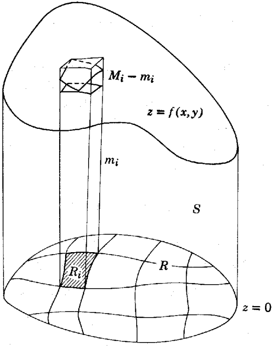


$$S = \{(x, y, z) : \ (x, y) \epsilon R, \ 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

A kettős integrál közelítése

R egy felosztása: $R = R_1 \cup \ldots \cup R_n$, ahol $\mathrm{int}\, R_i \cap \mathrm{int}\, R_j = \varnothing$.

$m_i = \inf\{f(x,y) : (x,y) \epsilon R_i\}$, $M_i = \sup\{f(x,y) : (x,y) \epsilon R_i\}$.



Ekkor $$s_n = \sum_{i=1}^{n} A(R_i) m_i \leq V(S) \leq \sum_{i=1}^{n} A(R_i) M_i = S_n.$$

Definíció.

Egy $R \subset \mathbf{R}^2$ *halmaz* ÁTMÉRŐJE

$$\delta(R) = \sup\{\|P_1 - P_2\| : \ P_1, P_2 \epsilon R\},$$

A FELOSZTÁS FINOMSÁGA $\delta(\mathcal{F}) = \max_{i=1,\ldots,n} \delta(R_i)$.

f folytonos R-en, ezért egyenletesen is folytonos. $\Longrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, hogy ha $\delta(\mathcal{F}) < \delta$, akkor $M_i - m_i < \varepsilon$.

Ekkor $S_n - s_n = \sum_{i=1}^{n} A(R_i)(M_i - m_i) \leq \sum_{i=1}^{n} A(R_i)\varepsilon = \varepsilon \cdot A(R)$.

Ezért

$$\sup\{s_n : n \epsilon \mathbf{N}\} = \inf\{S_n : n \epsilon \mathbf{N}\}.$$

Az imént definiált térfogatot így jelöljük: $V(S) = \iint_R f(x, y) dR$.

A kettős integrál

Definíció.

$f : R \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $R \subset \mathbb{R}^2$ mérhető és korlátos.

Legyen $(\xi_i, \eta_i) \epsilon R_i$. A függvényérték $f_i := f(\xi_i, \eta_i)$.

A felosztáshoz tartozó RIEMANN-FÉLE KÖZELÍTŐ ÖSSZEG*:*

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot A(R_i).$$

f RIEMANN-INTEGRÁLHATÓ, *ha létezik:* $\lim\limits_{\substack{n \to \infty, \\ \max \delta(R_i) \to 0}} V_n = V$.

Jelölés: $\iint\limits_R f(x, y)\, dR = \iint\limits_R f(x, y)\, d(x, y)$.

A kettős integrál

Következmény.

Ha f folytonos függvény, ÉT Jordan mérhető, akkor f ezen a tartományon integrálható is.

Példa. Legyen $f(x, y) = 1$, $\forall (x, y) \epsilon R$ esetén.

Ekkor

$$\iint\limits_R 1 \; dR = A(R).$$