

ANALÍZIS II. Példatár

Többszörös integrálok

2013. április 18.

2. fejezet

Feladatok

2.1. Kettős integrálok

Számítsa ki az alábbi integrálokat:

2.1.

$$\int_1^2 \int_2^4 \frac{1}{(x+y)^2} dx dy$$

2.2.

$$\int_2^5 \int_1^3 (5x^2y - 2y^3) dy dx$$

2.3.

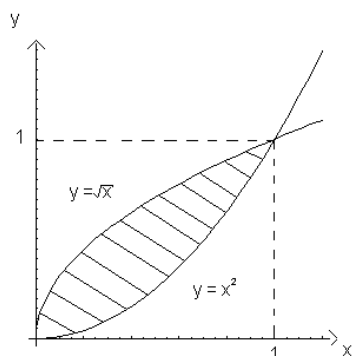
$$\int_0^\pi \int_0^{\sin x} (x+y) dy dx$$

2.4.

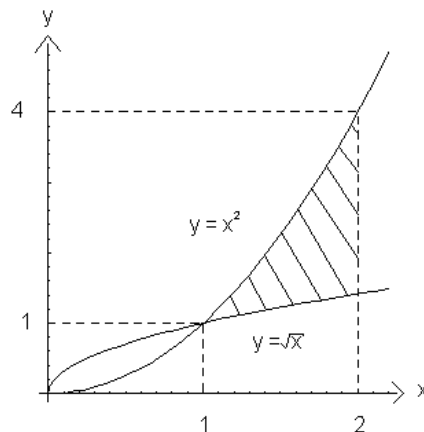
$$\int_0^1 \int_y^1 (x^2 + y^2) dx dy$$

Adja meg egyenlőtlenségekkel a következő ábrákon látható integrációs tartományokat!

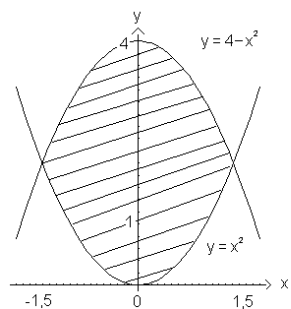
2.5. $D_5 = ?$



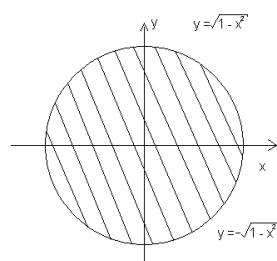
2.6. $D_6 = ?$



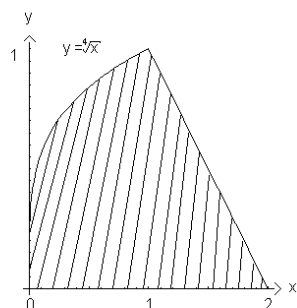
2.7. $D_7 = ?$



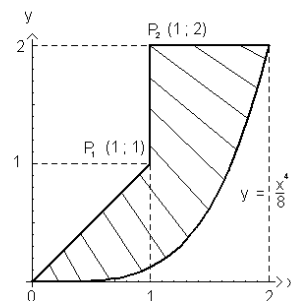
2.8. $D_8 = ?$



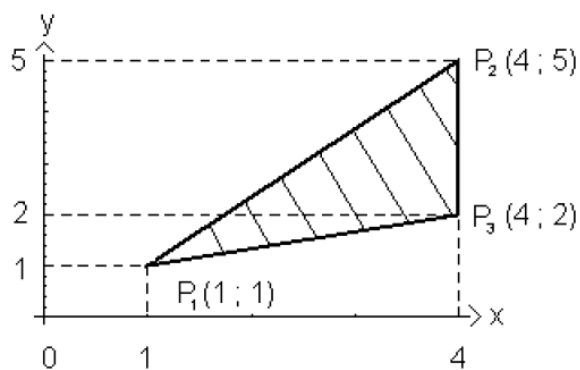
2.9. $D_9 = ?$



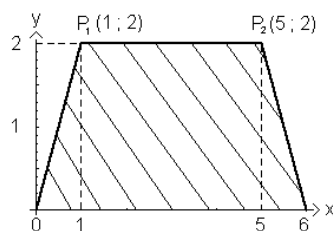
2.10. $D_{10} = ?$



2.11. Határozzuk meg az $f(x, y) = xy$ függvény integrálját az ábrán látható háromszög-tartományra

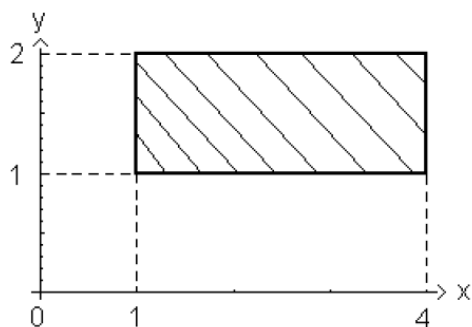


2.12. Számítsuk ki az $f(x, y) = \sqrt{x+y}$ függvény integrálját az ábrán látható trapéz alakú tartományon!

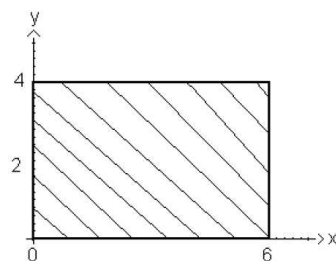


Számítsa ki az alábbi függvények kettős integrálját az ábrán megadott tartományokon!

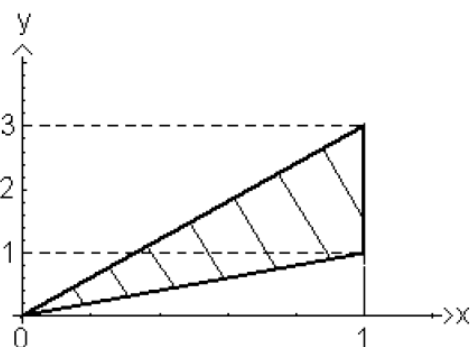
2.13. $f(x, y) = e^{x+y}$.



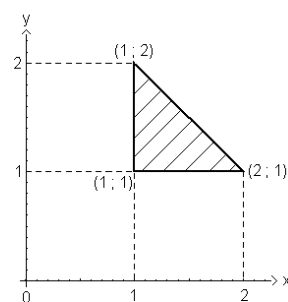
2.14. $f(x, y) = 3x^2 + 5y^2$.



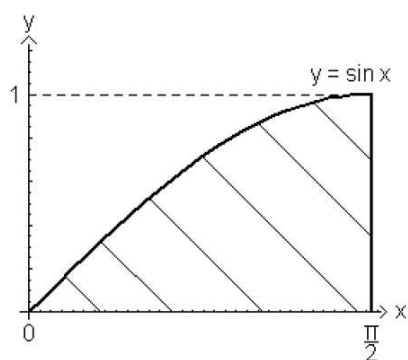
2.15. $f(x, y) = x^2y$.



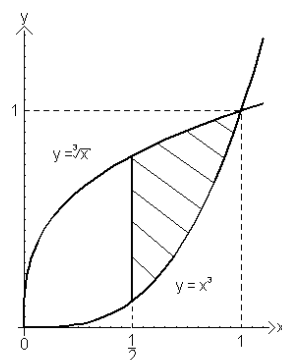
2.16. $f(x, y) = \frac{1}{(x+y)^3}$



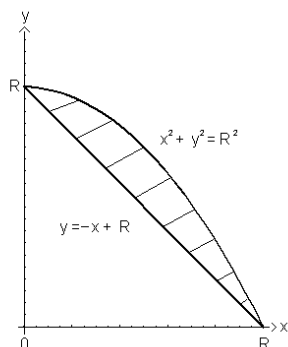
2.17. $f(x, y) = x + y$.



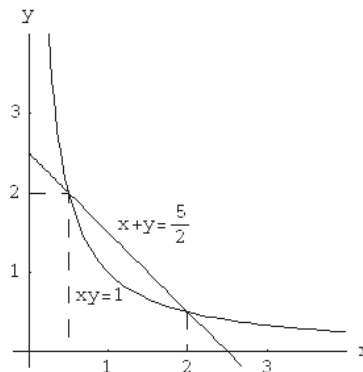
2.18. $f(x, y) = \frac{3}{x} + \frac{5}{y}$



2.19. $f(x, y) = 2x^3y$.



2.20. $f(x, y) = xy$.



2.21. Határozza meg két egymásra merőleges R sugarú henger közös részének térfogatát! (A hengerek tengelyei egy síkban vannak! A kérdéses térfogat felét kapjuk ha az $x^2 + z^2 = R^2$ függvényt az $x^2 + y^2 = R^2$ kör-tartományon integráljuk.)

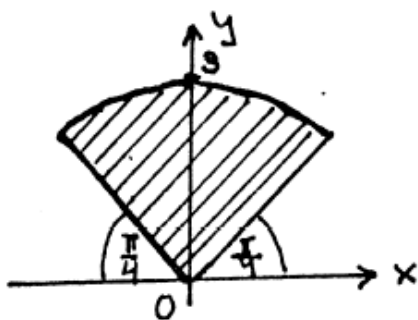
2.22. Számítsa ki az $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ hengerfelület, a $z = x + y + 6$ sík, és az xy sík által határolt csonkahenger térfogatát!

2.23. Határozza meg a $z = x^2 - y^2$ felület, az $x = 1$ és a $z = 0$ síkok által meghatározott test térfogatát!

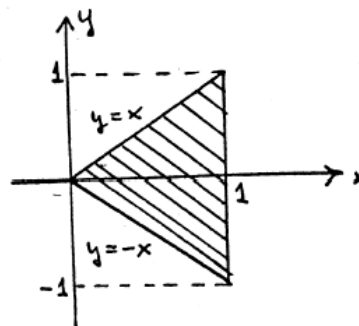
2.24. Határozzuk meg az R sugarú gömb térfogatát! A számolást polár-koordináta-rendszerben végezzük!

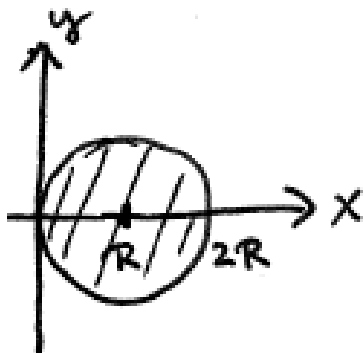
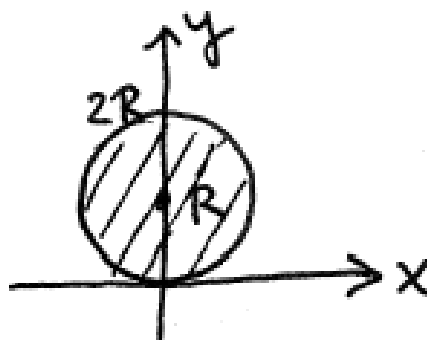
Írja le polár-koordináta-rendszerben egyenlőtlenségekkel az alábbi tartományok határait!

2.25. $D_{25} = ?$



2.26. $D_{26} = ?$



2.27. $D_{27} = ?$ 2.28. $D_{28} = ?$ 

2.29. Számítsuk ki a következő integrált az első síknegyedben lévő egységsugarú negyedkör tartományra:

$$\iint_T \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} dT$$

2.30.* Tekintsük az alábbi feltételek által határolt testnek azt a darabját, amely az $x \geq 0$ és $z \geq 0$ térrészbe esik:

- $z = x^2 - y^2$ hiperbolikus paraboloid,
- az xy tengelysík és
- az $x^2 + y^2 = 1$ hengerpalást

Mennyi ennek térfogata?

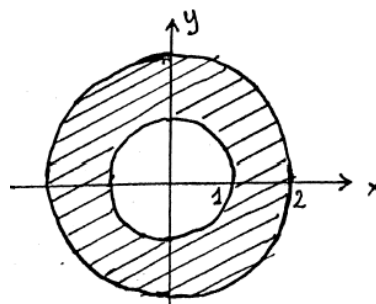
2.31. Határozza meg az

$$\iint_T (1 - x^2 - y^2) dT$$

integrál értékét az $x^2 + y^2 = 9$ körtartományon!

2.32. Számítsa ki az alábbi ábrán látható körgyűrű-tartományon az

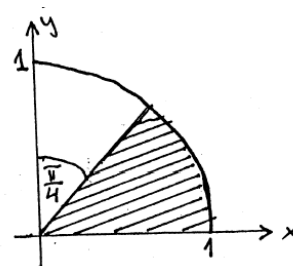
$$\iint_T (x^2 + 2y^2) dT \quad \text{integrál értékét!}$$



2.33. Határozza meg annak test térfogatát, melynek határolói:

- az $\frac{x^2}{4} + y = 1$ henger,
- a $3x + 4y + z = 12$ sík és
- az xy tengelysík.

2.34. Számítsa ki $\iint_T x^2 y \, dT$ értékét az ábrán látható tartományon!



2.35. Számítsa ki a $z = 1 - 4x^2 - y^2$ felület és az xy sík által meghatározott test térfogatát.

2.36. Határozza meg a $z = x^2 + y^2$ felület, a $z = 0$ sík és az $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ körhenger által határolt test térfogatát.

2.37. Mekkora a $z = 2 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$ kúp, a $z = 0$ sík és az $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ henger által határolt test térfogata?

2.38. Határozzuk meg a $2x = y^2 + 4z^2$ elliptikus paraboloid és az $x = 1$ sík által határolt test térfogatát!

2.2. Hármás integrálok

Számítsa ki az alábbi hármás integrálokat, integráljon más sorrendben is:

2.39.

$$\int_0^2 \int_0^1 \int_0^3 (2x - 4y + 6z - 3) \, dz \, dy \, dx$$

2.40.

$$\int_1^3 \int_1^3 \int_1^3 (x + y + z) \, dx \, dy \, dz$$

2.41.

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} \, dz \, dy \, dx$$

2.42. Határozza meg a alábbi hármas integrál értékét

$$\iiint_R (x - 2y + 4z) dR,$$

R térrészt az $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$ és $z = 0$ felületek határolják!

2.43. Számítsa ki az $x + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 2$ és $z = 0$ felületek által határolt R térrészre a

$$\iiint_R (x^2 + 2y + z^2) dR$$

integrál értékét!

2.44. Mekkora

$$\iiint_R (e^{x+y+z}) dR$$

értéke, ha R -t az $x = 1$, $y = 0$, $y = x$, $z = 0$ és $z = x + y$ egyenletű felületek határolják?

2.45.* Mennyi a

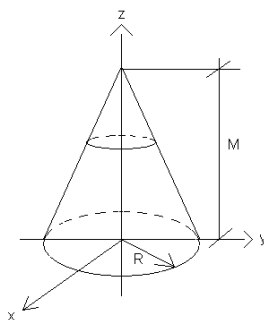
$$\iiint_R (x^2 + z^2) dR$$

integrál értéke ahol R az $x^2 + y^2 = 4$ hengernek a $z = 0$ és $z = 8$ síkok közé eső része!

2.46.* Mennyi a

$$\iiint_R (x^2 + y^2) dR$$

integrál értéke, ha R az ábrán látható z tengelyű, R alapsugarú egyenes körkúp?



2.47.* Számítsa ki a

$$\iiint_R zy x^2 dR$$

integrált az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ gömb $x \geq 0$ nyolcadára!

Írja fel az alábbi hármas integrálokat az összes lehetséges sorrendben (még 5-féle képpen):

2.48.

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z) dz dy dx$$

2.49.

$$\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} f(x, y, z) dy dz dx$$

2.50. Számítsa ki az alábbi hármas integrált:

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} d(x, y, z),$$

ahol E az $y = x^2 + z^2$ paraboloid $y = 4$ -ig terjedő része.

2.3. Térfogat, tömeg, súlypont

2.51.* Számítsa ki az

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4a^2 = 0$$

gömb és az

$$(x - a)^2 + y^2 - a^2 = 0$$

henger közös részének térfogatát (Viviani- féle test)!

2.52.* Határozza meg a $z = x^2 - y^2$ felület $x \geq 0$, $z \geq 0$ része, a $z = 0$ és az $x = 1$ síkok által határolt homogén test súlypontjának helyzetét!

2.53. Számítsa ki a $z = y^2 - x$, $x = 2$ és $z = 0$ egyenletű felületek által határolt homogén test súlypontjának koordinátáit!

2.54. Számítsa ki a következő síkok által közrezárt test térfogatát:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ x = 2y, \quad x &= 0, \quad z = 0 \end{aligned}$$

- 2.55.** Határozza meg az $x^2 + y^2 = 12$ henger, a $3x + 4y + z = 12$ sík és a $z = 0$ sík által határolt test térfogatát.
- 2.56.** Határozza meg a $z = x^2 + y^2$ paraboloid és az $x^2 + y^2 = 9$ henger azon részének térfogatát, mely a $z \geq 0$ féltérbe esik.
- 2.57.** Határozza meg a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kúp $4 \leq x^2 + y^2 \leq 25$ körgyűrű fölötti részének térfogatát.
- 2.58.** Határozza meg a $z = 10 - 3x^2 - 3y^2$ paraboloid és a $z = 4$ sík közti térfogatot.

2.4. Vonalintegrál

2.4.1. Valós függvény vonalintegrálja

2.61. Legyen a Γ görbe az

$$x^2 + y^2 = 1$$

körvonal x tengely fölötti része. Határozza meg az

$$\int_{\Gamma} (2 + x^2 y) ds$$

vonalintegrál értékét.

2.62. Tekintsünk egy fékör alakú drótot, melyet az

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y \geq 0$$

feltételek határoznak meg. Tegyük fel, hogy a drót sűrűsége y -ban lineárisan változik - a csúcsban a legnagyobb. Mekkora a drót tömege?

2.4.2. Vektormező vonalintegrálja

2.63. Határozza meg az

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix}$$

vektormező vonalintegrálját a

$$3y - 2x = 1$$

egyenes $0 \leq x \leq 1$ közötti darabja mentén. Az irányítás 0-ból 1-be vezet.

2.64. Határozza meg az

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x - y \\ xy \end{pmatrix}$$

vektormező vonalintegrálját az alábbi görbe mentén:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 3t - 5 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2.$$

2.65. Határozza meg az alábbi vektormező

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix}$$

vonalintegrálját a Γ görbe mentén, ahol

$$\Gamma = \{\gamma(t) : 0 \leq t \leq 1\}, \quad \gamma(t) = (t, t^2, t^3).$$

2.66. Integrálja az

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -y^2 \end{pmatrix}$$

vektormezőt azon Γ görbe mentén, melynek koordinátafüggvényei

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = b \sin(t), \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$$

2.67. Határozza meg az alábbi vektormező

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

vonaltintegrálját a Γ görbe mentén, ahol

$$\Gamma = \{\gamma(t) : 0 \leq t \leq 1\}, \quad \gamma(t) = (t^2, t, \frac{1}{t}).$$

2.68.* Számítsa ki az

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

vektormező vonaltintegrálját Γ mentén.

a)

$$\Gamma = \{\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 3t - 5 \end{pmatrix} : 0 \leq t \leq 3\}.$$

b) Γ a $P_1(-1, 2, 0)$ és $P_2(5, 5, 9)$ pontok közötti, koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenes szakaszokból álló út. Az irányítás P_1 -ből P_2 -be vezet.

Potenciálos-e a vektormező?

2.69. Számítsa ki az

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2z \\ 2x^3yz \\ x^3y^2 \end{pmatrix}$$

vektormező vonaltintegrálját a $P(1, 2, 3)$ pontot az origóval összekötő egyenes szakasz mentén. Az irányítás 0-ból P -be vezet.

3. fejezet

Megoldások

2.1. Kettős integrálok

2.1. $I = \ln(10/9) = 0.1054.$

2.2. $I = 660.$

2.3. $I = (5\pi)/4 = 3.927.$

2.4. $I = 1/3.$

2.5. $0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}.$

2.6. $1 \leq x \leq 2, \sqrt{x} \leq y \leq x^2.$

2.7. $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, x^2 \leq y \leq 4 - x^2.$

2.8. $-1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}.$

2.9. 1. megoldás: A tartomány két részre bontható: $D_9 = D'_9 \cup D''_9$, ahol

$$D'_9 : \quad 0 \leq x \leq 10 \quad \leq y \leq \sqrt[4]{x},$$

és

$$D''_9 : \quad 1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 2 - x.$$

2. megoldás: $0 \leq y \leq 1, \quad y^4 \leq x \leq 2 - y.$

2.10. A tartomány két részre bontandó: $D_{10} = D'_{10} \cup D''_{10}$, ahol

$$D'_{10} : \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \frac{x^4}{8} \leq y \leq x$$

és

$$D''_{10} : \quad 1 \leq x \leq 2, \quad \frac{x^4}{8} \leq y \leq 2.$$

2.11. Az integrálási tartomány határai:

$$1 \leq x \leq 4, \quad \frac{1}{3}(x+2) \leq y \leq \frac{1}{3}(4x-1),$$

és így $I = 37,875.$

2.12. Az integrálási tartomány

$$0 \leq y \leq 2, \quad \frac{y}{2} \leq x \leq 6 - \frac{y}{2}.$$

Az integrál értéke $I = 19.34.$

2.13. $I = e^6 - e^5 - e^3 + e^2 = 242.32.$

2.14. $I = 1504.$

2.15. $I = 4/5.$

2.16. $I = 1/36.$

2.17. $I = 1 + \pi/8.$

2.18. $I = 3.027.$

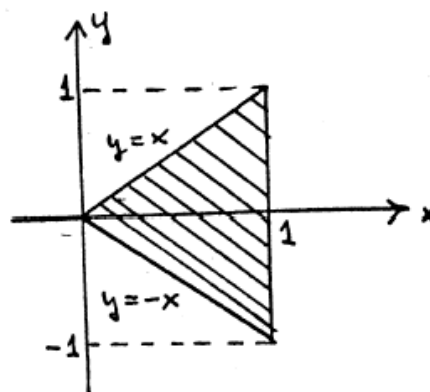
2.19. $I = \frac{1}{15}R^6$

2.20. $I = \frac{165}{128} - \ln 2.$

2.21. $I = \frac{16}{3}R^3.$

2.22. *Útmutató:* A térfogatot megkaphatjuk, ha az $f(x, y) = x + y + 6$ függvényt integráljuk az $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ellipszis tartományon. $I = 36\pi.$

2.23. *Útmutató:* A $z = 0$ sík - vagyis az xy sík - ezt a felületet az $x^2 - y^2 = 0$ egyenes-párban metszi. Mivel $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 0$, kapjuk az $y = \pm x$ egyeneseket. Az integrációs tartomány tehát az ábrán látható.



$$I = \frac{1}{3}.$$

2.24. Polár koordinátákat használunk. Ekkor $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ és $d(x, y) = r d(r, \theta)$. Ha az

$$f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{R^2 - r^2}$$

függvényt a $0 \leq r \leq R$ és $0 \leq \theta \leq 2\pi$ határok között integráljuk, a gömb térfogatának felét kapjuk.

2.25. $0 \leq r \leq 3, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}.$

$$2.26. \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta}.$$

$$2.27. \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq R \cos \theta.$$

$$2.28. \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq \sin \theta.$$

$$2.29. \quad I = \frac{\pi}{2}(\sqrt{2} - 1) = 0,6506.$$

2.30. A kiszámítandó térfogat negyedrészt kapjuk ha – polárkoordinátákra áttérve – a

$$0 \leq r \leq 1, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

határok között integrálunk. $I = 1/4$.

$$2.31. \quad I = -31,5\pi = -98,96.$$

$$2.32. \quad I = \frac{45}{4}\pi = 35,34.$$

2.33. *Útmutató:* Integráljuk az $f(x, y) = 12 - 3x - 4y$ függvényt az $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ tartományon!

Helyettesítünk

$$x = 2r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Ekkor $d(x, y) = 2r d(r, \theta)$. Az integrálási határok

$$0 \leq r \leq 1 \quad \text{és} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

$$I = 24\pi.$$

$$2.34. \quad I = \frac{4 - \sqrt{2}}{60} = 0,043.$$

$$2.35. \quad I = \frac{\pi}{4} = 0,7854.$$

2.36. Polár koordinátákban az integrálási határok:

$$0 \leq r \leq 4 \cos \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Az integrál értéke $I = 24\pi$.

$$2.37. \quad I = \frac{\pi}{2} - \frac{8}{9} = 0,6819.$$

$$2.38. \quad I = \frac{\pi}{2}.$$

2.2. Hármias integrálok

2.39. 36.

2.40. 48.

$$2.41. I = \frac{1}{2}(\ln 2 - \frac{5}{8}) = 0.0341.$$

$$2.42. I = \frac{1}{8}.$$

$$2.43. I = \frac{40}{3}.$$

$$2.44. I = \frac{1}{8}(e^4 - 6e^2 + 8e - 3).$$

2.45. Az integrált henger-koordinátákban számoljuk ki. A helyettesítés:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z,$$

és

$$dx \, dy \, dz = r \, dr \, d\theta \, dz.$$

Az integrálás határai:

$$0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 8.$$

Az integrál értéke:

$$I = \frac{2144}{3}\pi = 2254.19.$$

2.46. A kúp egyenlete:

$$\frac{z}{M} = 1 - \sqrt{\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2}}.$$

Henger koordinátákkal kifejezve:

$$z = M \left(1 - \sqrt{\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2}} \right) = M \left(1 - \frac{r}{R} \right).$$

Az integrálás határai:

$$0 \leq z \leq M \left(1 - \frac{r}{R} \right); \quad 0 \leq r \leq R; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Az integrál értéke:

$$I = \frac{MR^4\pi}{10}$$

2.48. Az integrált gömb koordináták bevezetésével lehet egyszerűen kiszámítani. A helyettesítés:

$$x = r \cos \theta \sin \vartheta, \quad y = r \sin \theta \sin \vartheta, \quad z = r \cos \vartheta,$$

valamint

$$dx \, dy \, dz = r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\theta.$$

Az integrálás határai:

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Az integrál értéke:

$$I = \frac{1}{105}.$$

2.49. *Útmutató:* Határozzuk meg az integrálási tartományt és írjuk fel különböző normáltartományként.

2.52. *Útmutató:* Határozzuk meg az integrálási tartományt és írjuk fel különböző normáltartományként.

2.50. 1.megoldás: (z szerinti normáltartományként)

Az (x, y) síkbeli vetületet jelölje S . Ez megegyezik azzal a metszettel, ahol $z \equiv 0$. Tehát

$$S = \{(x, y) : -2 \leq x \leq 2, \, x^2 \leq y \leq 4\}$$

így R normáltartomány:

$$R = \{(x, y, z) : (x, y) \in S, \, -\sqrt{y-x^2} \leq z \leq \sqrt{y-x^2}\}$$

ekkor az integrál

$$\iiint_R \sqrt{x^2 + z^2} \, d(x, y, z) = \iint_S \left(\int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2 + z^2} \, dz \right) d(x, y)$$

Ennek kiszámítása igen hosszadalmas lenne.

2.megoldás: (y szerinti normáltartományként)

Az (x, z) síkbeli vetületet jelölje T :

$$T = \{(x, z) : x^2 + z^2 \leq 4\}.$$

Ezért

$$R = \{(x, y, z) : (x, y) \in T, \, x^2 + z^2 \leq y \leq 4\}.$$

Tehát az integrál:

$$I = \iint_T \left(\int_{x^2+z^2}^4 \sqrt{x^2+z^2} dy \right) d(x,z) = \iint_T (4-x^2-z^2) \sqrt{x^2+z^2} d(x,z)$$

Ezt úgy számolhatjuk ki, ha az (x, z) síkban áttérünk polárkoordinátákra:

$$I = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4-r^2) r^2 d\theta dr = \frac{128\pi}{15}$$

ahol a jobboldali r^2 -et a Jacobi-determináns r -jével való szorzás miatt kapunk

2.3. Térfogat, tömeg, súlypont

2.51. Az integrálandó függvény a felső félgömbre szorítkozva.

$$z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$$

Az integrációs tartomány az $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ kör. Polárkoordináták bevezetése után az integrálás határai:

$$0 \leq r \leq 2a \cos \theta \text{ és } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Az integrál értéke:

$$V = \frac{32a^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).$$

2.52. Homogén test súlypontjának koordinátáit az alábbi összefüggések segítségével számíthatjuk:

$$S_x = \frac{1}{V} \iiint_R x dR, \quad S_y = \frac{1}{V} \iiint_R y dR, \quad S_z = \frac{1}{V} \iiint_R z dR,$$

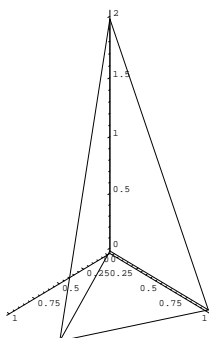
ahol V a test térfogata.

Az integrálás határait ld. a 2.23. feladatnál. A súlypont koordinátái:

$$S \left(\frac{4}{5}; 0; \frac{4}{15} \right).$$

2.53.

$$S \left(\frac{10}{7}; 0; -\frac{4}{7} \right).$$



2.54. Legyen $S \in R^3$ a megadott síkok által közrezárt térrész.

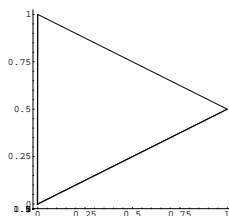
Legyen $R \in R^2$ ennek vetülete az (x, y) síkon. Az (1) és (4) síkok metszete az (x, y) síkban:

$$x + 2y + z = 2$$

$$z = 0$$

$$x + 2y = 0$$

Az (1) sík a z tengelyt a $z = 2$ pontban metszi. Az $x = 2y$ sík merőleges az (x, y) síkra, így R :



A fenti ábrán (S) felülnézete látható, ahol a felső függvény $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x$, az alsó $g(x) = \frac{1}{2}x$.

Tehát a keresett térfogat:

$$\iint_R (2 - x - 2y) d(x, y) = \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}} (2 - x - 2y) dy dx = \frac{1}{3}$$

2.55. A következő integrált nézzük:

$$\int \int_R \int_0^{12-3x-4y} 1 dz d(x, y) = \int \int_R (12 - 3x - 4y) d(x, y)$$

Írjuk át polárkoordinátákra:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{12}} (12 - 3r \cos \theta - 4r \sin \theta) r \, dr \, d\theta = 144\pi$$

2.56. Polárkoordinátákban számolunk:

$$\iint_R \int_0^{x^2+y^2} 1 \, dz d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^3 ((r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2) r \, dr \, d\theta = \frac{81}{2}\pi$$

2.57. A nagyobbik sugarú kör vetületéből kivonjuk a kisebbiket, így kapjuk meg a körgyűrűt. Átírva polárkoordinátákba:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^5 \sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} r \, dr \, d\theta - \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} r \, dr \, d\theta = \\ = 78\pi \end{aligned}$$

2.58. Átírjuk polár koordinátákba, és a $4 = 10 - 3x^2 - 3y^2$ kör intervallumán tekintjük:
 $-6 = -3x^2 - 3y^2$ azaz $x^2 + y^2 = 2$

$$\iint_R \int_4^{10-3x^2-3y^2} 1 \, dz d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (6 - 3(r \cos \theta)^2 - 3(r \sin \theta)^2) r \, dr \, d\theta = 6\pi$$

2.4. Vonalintegrál

2.4.1. Valós függvény vonalintegrálja

2.61. $I = 2(\pi - \frac{1}{3})$.

2.62. Adjuk meg a görbét paraméteresen:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

A sűrűségfüggvény:

$$\rho(x, y) = k(1 - y),$$

ahol k az arányossági konstans.

Így a tömeg:

$$\begin{aligned} m &= \int_{\Gamma} k(1 - y) ds = \int_0^{\pi} k(1 - \sin t) \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \\ &= k\pi + k \cos t \Big|_0^{\pi} = k(\pi - 2). \end{aligned}$$

2.4.2. Vektormező vonalintegrálja

2.63. $\frac{74}{81}$.

2.64. 32.

2.65. Behelyettesítve a paraméterezett görbe egyenletét a vektormező koordinátaiba:

$$F(\underline{r}) = \begin{pmatrix} tt^2 \\ t^2t^3 \\ tt^3 \end{pmatrix}.$$

A görbe t szerint deriváltja:

$$\dot{\gamma}(t) = (1, 2t, 3t^2).$$

Így a vonalintegrál:

$$\int_{\Gamma} F(\underline{r}) d\underline{r} = \int_0^1 \langle (t^3, t^5, t^4), (1, 2t, 3t^2) \rangle dt = \int_0^1 (t^3 + 5t^6) dt = \frac{27}{28}.$$

2.66. $-\frac{a^3 + b^3}{3}$.

2.67. $\frac{1}{2}$.

2.68.* a) 225

b) 225

A vektormező potenciális.

2.69. 1. *Megoldás.* Az egyenes szakasz egy lehetséges paraméterezése, és annak deriváltja

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

A vektormező a görbe mentén

$$F(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} 36t^5 \\ 12t^5 \\ 4t^5 \end{pmatrix},$$

ezért

$$F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = 72t^5.$$

A vonalintegrál értéke

$$\int_{\Gamma} F(\underline{r}) d\underline{r} = \int_0^1 72t^5 dt = 12.$$

2. *Megoldás.* Legyen $U(x, y, z) = x^3 y^2 z$. Ekkor

$$F(x, y, z) = \text{grad } U(x, y, z).$$

Így

$$\int_{\Gamma} F(\underline{r}) d\underline{r} = U(P) - U(0) = 12.$$