Differenciálhatóság

Függvényrendszerek

2020. ápilis

Egyváltozós valós függvényre. Ism.

Tétel. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy f folytonos $[a,b]$-n, differenciálható (a,b)-n. Ekkor létezik olyan $\xi \in (a,b)$, melyre:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ekvivalens állítás: A fenti feltételekkel

$$\exists \theta \in (0,1) : \qquad f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b-a))(b-a).$$

A kapcsolat: $\xi \in (a,b) \iff \xi = a + \theta(b-a)$, ahol $\theta \in (0,1)$

$\exists\theta \in (0,1):\qquad f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b-a))(b-a).$

Lagrange-féle középértéktétel két dimenzióban.

Tétel. $S \subset \mathbb{R}^2$. Tfh $f : S \to \mathbb{R}$ diff-ható $(x_0, y_0) \in \operatorname{int} S$ egy U környezetében.

Tfh $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = (x, y) \in U$.

Ekkor $\exists\theta \in (0,1)$, melyre:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f'_x(x_\theta, y_\theta)\Delta x + f'_y(x_\theta, y_\theta)\Delta y \quad = \operatorname{grad} f(x_\theta, y_\theta) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix},$$

ahol $(x_\theta, y_\theta) = (x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$.

Lagrange-féle középértéktétel n dimenzióban

Tétel. $f : S \to \mathbb{R}$ n-változós függvény. Tfh f differenciálható az $x_0 \in S$ egy U környezetében. Legyen $h \in \mathbb{R}^n$ olyan megváltozás, melyre $(x_0 + h) \in U$.
Ekkor létezik $\theta \in (0, 1)$:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \mathrm{grad}\, f(x_0 + \theta h) \cdot h = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x_\xi) h_i,$$

ahol $x_\xi = x_0 + \theta h$.

Megj. A fenti tételben $\mathrm{grad}\, f(x_0 + \theta h)$ sorvektor, h pedig oszlopvektor.
A képletben szereplő $\cdot$ skaláris szorzást jelöl.

Bizonyítás. Vezessük be:

$$F(t) := f(x_0 + th) \quad F : "\mathbb{R} \to \mathbb{R}".$$

Ekkor $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ diff-ható, és $F(0) = f(x_0)$, $F(1) = f(x_0 + h)$.
Alkalmazzuk az egyváltozós Lagrange-féle középértéktételt:

$$\exists \theta \in [0,1] : \quad F(1) - F(0) = F'(\theta) \cdot 1.$$

Mivel a láncszabály alkalmazásával rögzített t-re

$$F'(t) = f'_{x_1}(x_0 + th)\, h_1 + \ldots + f'_{x_n}(x_0 + th)\, h_n,$$

$$\Longrightarrow \quad F'(\theta) = f'_{x_1}(x_\xi)\, h_1 + \ldots + f'_{x_n}(x_\xi\, h_n, \quad x_\xi = x_0 + \theta h. \quad \surd$$

Következmény. Tfh $S \subset \mathbf{R}^n$ konvex (vagyis ...), $f : S \to \mathbf{R}$ differenciálható. Feltesszük, hogy $\mathrm{grad}\, f(x) = 0$ **minden** $x \in S$-re. Ekkor a függvény konstans.

Bizonyítás. $x, x' \in S$ tetszőleges. $\exists \theta \in (0,1)$

$$f(x) - f(x') = \mathrm{grad}\, f(x + \theta(x - x'))(x - x').$$

A konvexitás miatt $x + \theta(x - x') \in S$, így

$$\mathrm{grad}\, f(x + \theta(x - x')) = 0 \in \mathbf{R}^n, \qquad \Longrightarrow f(x) = f(x').$$

Megjegyzés. A fenti állítás összefüggő tartományon értelmezett függvényre is igaz, a konvexitás nem szükséges. (*HF: Miért?*)

Feladat. $f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, elegendően sokszor differenciálható (x_0, y_0)-ban. Adjunk becslést az (x_0, y_0)*-beli deriváltakkal:* $f(x, y) - f(x_0, y_0) \approx ?$

Érintő sík $\equiv$ elsőfokú Taylor-polinom:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Magasabb fokú Taylor polinom? Segít az egyváltozós eset:

$$F(t) := f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y), \quad \Delta x = x - x_0,\ \Delta y = y - y_0.$$

Ekkor $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $F(0) = f(x_0, y_0)$, $F(1) = f(x, y)$.

Az $F(t) := f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) =: f(x_t, y_t)$ függvény deriváltjai:

$$\begin{aligned} F'(t) &= f'_x(x_t, y_t)\Delta x + f'_y(x_t, y_t)\Delta y = \mathrm{grad}\ f(x_t, y_t)\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} \\ F''(t) &= f''_{xx}(x_t, y_t)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(x_t, y_t)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_t, y_t)(\Delta y)^2 =? \end{aligned}$$

A másodfokú Taylor formula alapján ezt kapjuk:

$$F(1) - F(0) \approx F'(0)(1-0) + \frac{1}{2}F''(0)(1-0)^2 \quad \Longrightarrow$$

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \mathrm{grad}\ f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} + \frac{1}{2}(\Delta x\ \Delta y) \cdot H_0 \cdot \begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix},$$

ahol $H_0 = H(x_0, y_0)$ a Hesse-mátrix.

HF. Az *n*-ed rendű Taylor formula a *Jegyzetben* megnézhető.

”Egyszerre több függvényt tekintünk”

Definíció. Adott $R \subset \mathbb{R}^2$ tartomány, és két valós függvény, $\Phi, \Psi : R \to \mathbb{R}$. A FÜGGVÉNYRENDSZER:

$$\begin{aligned} \xi &= \Phi(x, y) \\ \eta &= \Psi(x, y). \end{aligned}$$

Az $F : R \to \mathbb{R}^2$ leképezést, melyre

$$F : (x, y) \mapsto (\xi, \eta) = F(x, y)$$

VEKTORMEZŐ-nek nevezzük.

1. Példa

Egy homogén lineáris leképezés:

$$\begin{aligned} \xi &= ax + by \\ \eta &= cx + dy. \end{aligned}$$

Ez $\mathbb{R}^2$-beli lineáris transzformáció. Tömören:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

2. Példa

Polárkoordináták és Descartes koordináták közötti kapcsolat:

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} x & = & r\cos(\theta) \\ y & = & r\sin(\theta) \end{matrix}\ .$$

Legyen $R = \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi)$.

A vektormező $F : R \to \mathbb{R}^2$.

$$F(r, \theta) = (x, y).$$

Definíció. Tfh $F:(x,y)\mapsto(\xi,\eta)$ koordinátafüggvényei $\Phi,\Psi:R\to\mathbb{R}^2$ differenciálhatók. Ekkor az F vektormező DIFFERENCIÁLHATÓ. Ennek JACOBI MÁTRIXa:

$$\mathcal{J}(x,y):=\begin{pmatrix}\Phi'_x(x,y) & \Phi'_y(x,y)\\ \Psi'_x(x,y) & \Psi'_y(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\operatorname{grad}\Phi(x,y)\\ \operatorname{grad}\Psi(x,y)\end{pmatrix}.$$

A $\mathcal{J}(x,y)$ mátrix determinánsa a JACOBI DETERMINÁNS:

$$D(x,y):=\Phi'_x(x,y)\Psi'_y(x,y)-\Psi'_x(x,y)\Phi'_y(x,y).$$

A Jacobi determináns *formális jelölése*: $D(x,y)=\dfrac{d(\xi,\eta)}{d(x,y)}$.

1. Példa. (folyt.)

$$\begin{aligned} \xi &= ax + by \\ \eta &= cx + dy. \end{aligned}$$

Jacobi mátrixa: $\mathcal{J}(x, y) = A$, Jacobi determinánsa: $D(x, y) = \det(A)$.

2. Példa. (folyt.)

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \end{aligned} \quad .$$

Jacobi mátrixa ill. determinánsa:

$$\mathcal{J}(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} \implies D(r, \theta) = r.$$

Függvényrendszer inverze

Az $F = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix} : R \to \mathbf{R}^2$ vektormező képtere:

$$B = \{(\xi, \eta) : \ \xi = \Phi(x, y), \eta = \Psi(x, y) : (x, y) \in R\}.$$

Tegyük fel, hogy az $F : R \to B$ leképezés injektív.

Az inverz rendszer ilyen alakú lesz:

$$F^{-1} : B \to R, \qquad \begin{array}{rcl} x & = & g(\xi, \eta) \\ y & = & h(\xi, \eta) \end{array} .$$

Az inverz leképezés differenciálhatósága

Tegyük fel, hogy az inverz rendszer függvényei differenciálhatók.

$$\begin{aligned} x &= g(\xi,\eta) \\ y &= h(\xi,\eta) \end{aligned}$$

Az inverz rendszer Jacobi mátrixa:

$$\mathcal{K}(\xi,\eta) := \begin{pmatrix} g'_\xi(\xi,\eta) & g'_\eta(\xi,\eta) \\ \\ h'_\xi(\xi,\eta) & h'_\eta(\xi,\eta) \end{pmatrix}.$$

Tétel. (*Invertálhatóság feltétele*) Tfh $F : R \to \mathbb{R}^2$ differenciálható, és Jacobi mátrixa nem szinguláris az $(x_0, y_0) \in \operatorname{int} R$ pontban.

Ekkor F az (x_0, y_0) egy környezetében invertálható, és az inverz függvény is differenciálható. Az inverz rendszer deriváltja:

$$\mathcal{K}(\xi, \eta) = \left(\mathcal{J}(x, y)\right)^{-1}, \quad (x, y) \longleftrightarrow (\xi, \eta)$$

Speciálisan, a Jacobi determinánsokra:

$$\frac{d(\xi, \eta)}{d(x, y)} = 1 \Big/ \frac{d(x, y)}{d(\xi, \eta)}.$$

Analógia: Az egyváltozós függvény inverzének deriváltja:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \qquad y = f(x).$$

1. Példa. (folyt.)

$$\begin{aligned} \xi &= ax + by \\ \eta &= cx + dy. \end{aligned}$$

A rendszer invertálható $\iff$ $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$.

2. Példa. (folyt.)

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \end{aligned} .$$

Jacobi determinánsa $D(r, \theta) = r$.

Ezért az origó környezetében **nincs** inverz.