

# Függvénysorozatok, függvénysorok, hatványsorok

2015. március

## 1. Függvénysorozatok, függvénysorok

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvénysorozatok ill. függvénysorok konvergensek-e. A konvergencia pontonkénti vagy egyenletes?

Fs1.

$$f_n(x) = x^n, \quad x \in [0, 1]$$

Fs2.

$$f_n(x) = x^n, \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Fs3.

$$f_n(x) = \frac{1}{n+x}, \quad x \in [0, 2]$$

Fs4.

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Fs5.

$$f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Fs6.

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad x \geq 0$$

Fs7.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x}, \quad x \in [0, 2]$$

Fs8.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Fs9.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Fs10.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^n}, \quad x \geq 1$$

Fs11.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Fs12.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}, \quad x \geq 1$$

Hol konvergensek az alábbi függénysorozatok, függvénysorok? Egyenletes-e a konvergencia?

Fs13.

$$f_n(x) = e^{-nx}$$

Fs14.

$$f_n(x) = e^{-nx^2}$$

Fs15.

$$f_n(x) = e^{-(n-x)^2}$$

Fs16.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$$

Fs17.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2+n}$$

## 2. Hatványsorok

Határozzuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát:

H1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

H2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

H3.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-5)^n$$

H4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} (x-5)^n$$

H5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$$

H6.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n$$

H7.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$$

H8.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-3}{n}\right)^n$$

H9.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n4^n}$$

Határozzuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát és írjuk fel az összegfüggvényt:

H10.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{(4+3x)^n}$$

H11.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+3)x^n$$

H12.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+3)(x-1)^n$$

Fejtsük hatványsorba az alábbi függvényeket először az  $x_0 = 0$ , majd az  $x_0 = 2$  pont körül.

Határozzuk meg a kapott hatványsorok konvergenciahalmazait is.

H13.

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

H14.

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

H15.

$$f(x) = \frac{1}{5-x}$$

H16.

$$f(x) = \frac{1}{3-2x}$$

H17.

$$f(x) = \frac{x}{2+x}$$

Fejtsük hatványsorba az alábbi függvényeket. Határozzuk meg a kapott hatványsorok konvergenciahalmazait is.

H18.

$$f(x) = \cos(5x)$$

H19.

$$f(x) = \arcsin(2x)$$

H20.

$$f(x) = \ln(1-x)$$