

ANALÍZIS II. Példatár

Komplex függvénytan

2011. május

5. fejezet

Feladatok

5.1. Komplex számsorozatok és számsorok

Konvergensek-e a következő komplex elemű számsorozatok, s ha igen, számítsa ki a határértéküket!

$$5.1. z_n = \frac{n - i}{2n + i}$$

$$5.2. z_n = \frac{n^2 - i(n^2 - 1)}{n^2}$$

$$5.3. z_n = \frac{(n + i)^2}{n^2}$$

$$5.4. z_n = i^n$$

$$5.5. z_n = (1 + i)^n$$

$$5.6. z_n = \left(1 + \frac{i\pi}{n}\right)^n$$

$$5.7. z_n = \frac{\sqrt{n} + (n - 1)i}{n\pi}$$

Konvergensek-e az alábbi komplex tagú végtelen sorok? Ha igen, számítsa ki az összegüket!

$$5.8. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^2$$

$$5.9. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + i)^n}$$

$$5.10. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{1 + i}\right)^n$$

5.2. Komplex függvények értelmezése

Határozzuk meg a komplex számsíknak azon tartományát, melyet az alábbi leképezés feleltet meg a komplex sík adott tartományának! ($w = f(z)$)

$$5.11. f(z) = (1 + i)z, \quad \{z : \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

$$5.12. f(z) = 1 + iz, \quad \{z : \operatorname{Re}(z) > 0 \text{ és } 0 < \operatorname{Im}(z) < 2\}$$

$$5.13. f(z) = -iz - 1, \quad \{z : |z| < 1\}$$

$$5.14. f(z) = (-1 + i)z, \quad \{z : |z| > 1\}$$

Határozza meg a w sík mely tartományát felelteti meg a $f(z) = \frac{1}{z}$ leképezés a sík alábbi tartományainak:

$$5.15. \left\{ 0 > \operatorname{Re}(z) < \frac{1}{2c} \right\}$$

$$5.16. \{ \operatorname{Re}(z) > 1, \operatorname{Im}(z) > 0 \}$$

$$5.17. \{ \operatorname{Im}(z) > c \}$$

5.3. Komplex függvények differenciálhatósága

Vizsgálja meg, differenciálhatók-e az alábbi komplex változós függvények! Ahol differenciálható, írja fel a deriváltfüggvényt is!

$$5.18. f(z) = y^3 - 3x^2y + i(x^3 - 3xy^2).$$

$$5.19. f(z) = \frac{1}{z}.$$

$$5.20. f(z) = \frac{1}{z^2}.$$

$$5.21. f(z) = \operatorname{Re}(z).$$

$$5.22. f(z) = z^2.$$

$$5.23. f(z) = \bar{z}^2.$$

$$5.24. f(z) = 2x + xy^2i.$$

$$5.25. f(z) = e^x(\cos y - i \sin y).$$

$$5.26. f(z) = z^3.$$

$$5.27. f(z) = x^3 - (y - 1)^3i.$$

5.28. $f(z) = 1 - iz$.

5.29. $f(z) = |z|$.

5.30. $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$.

5.4. Harmonikus függvények

Vizsgálja meg, harmonikusak-e a következő függvények, s ha igen, keresse meg harmonikus társukat!

5.31. $u(x, y) = 2x(1 - y)$.

5.32. $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$.

5.33. $u(x, y) = \sinh x \cdot \sin y$.

5.34. $v(x, y) = e^x \cdot \sin y$.

5.35. $v(x, y) = -\sin x \cdot \sinh y$.

Megoldások

5.1. Komplex számsorozatok és számsorok

5.1 Konvergens, $\frac{1}{2}$

5.2 Konvergens, $1-i$

5.3 Nem konvergens

5.4 Nem konvergens

5.5 Nem konvergens

5.6 Konvergens, -1

5.7 Konvergens, $\frac{1}{\pi}i$

5.8 Konvergens, $\frac{2}{5}(2+i)$

5.9 Konvergens, $1-i$

5.10. Konvergens, i

5.2. Komplex függvények értelmezése

5.11. $\{Im(w) > Re(w)\}$

5.12. $-1 < Re(w) < 1$ és $Im(z) > 0$

5.13. $(u+1)^2 + v^2 < 1$ körtartomány

5.14. $u^2 + v^2 > 2$ körkülső

5.15. Az $\{Im(w) > 0\}$ félsík $v^2 + (v+c)^2 = c^2$ körön kívüli része

5.16. Az $\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 < \frac{1}{4}$ kör $\{Im(v) < 0\}$ félkörének belseje

5.17.

$$\left\{ u^2 + \left(v + \frac{1}{2c} \right) < \frac{1}{4c^2} \right\}, \text{ ha } c > 0$$

$$Im(w) < 0, \text{ ha } c = 0$$

5.3. Komplex függvények differenciálhatósága

5.18. A függvény az egész számsíkon differenciálható.

5.19. A függvény a $z = 0$ kivételével mindenütt differenciálható.5.20. A függvény a $z = 0$ kivételével mindenütt differenciálható.

5.21. A függvény sehol sem differenciálható.

5.22. A függvény differenciálható.

5.23. A függvény csak a $z = 0$ pontban differenciálható.

5.24. A függvény nem differenciálható.

5.25. A függvény nem differenciálható.

5.26. A függvény differenciálható.

5.27. A függvény csak a $z = i$ pontban differenciálható.

5.28. A függvény differenciálható.

5.29. A függvény nem differenciálható.

5.4. Harmonikus függvények

5.31. Harmonikus, $v(x, y) = x^2 - (1 - y)^2$.5.32. Harmonikus, $v(x, y) = 2y - 3x^2y + y^3$.5.33. Harmonikus, $v(x, y) = -\cosh x \cdot \cos y$.5.34. Harmonikus, $u(x, y) = e^x \cdot \cos y$.5.35. Harmonikus, $u(x, y) = \cos x \cdot \cosh y$.