Komplex függvénytan. 2. rész

2020. május

$D \subset \mathbb{C}$. $f : D \to \mathbb{C}$ függvény KANONIKUS ALAKJA :

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$: $\quad u(x,y) = \mathrm{Re}\,(f(x+iy)),\ v(x,y) = \mathrm{Im}\,(f(x+iy))$.

Tétel. Tfh f kanonikus alakja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ és $z_0 = x_0 + iy_0$ egy torlódási pont. Ekkor

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = U + iV \iff \lim_{(x_0,y_0)} u(x,y) = U,\ \lim_{(x_0,y_0)} v(x,y) = V.$$

Tétel. f folytonos $z_0 = x_0 + iy_0$-ban, $\iff$ u és v folyt. (x_0, y_0)-ban.

Tétel. $f : T \to \mathbb{C}$ és $z_0 \in \mathrm{int}\, T$. Tfh u és v folyt. diff-hatók. Ekkor f differenciálható a $z_0 = x_0 + iy_0$ pontban $\iff$ C-R egyenletek:

$$u'_x(x_0,y_0) = v'_y(x_0,y_0) \quad u'_y(x_0,y_0) = -v'_x(x_0,y_0).$$

Exponenciális függvény $\mathbb{C}$-ben

$f(z) = e^z$ függvény természetes módon így értelmezhető:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Ez valóban a valós $f(x) = e^x$ függvény kiterjesztése.

$$|e^z| = e^x = e^{\mathrm{Re}\,(z)}, \qquad \mathrm{arc}\,(e^z) = y,$$

ahol $\mathrm{arc}\,(z)$ a komplex szám trigonometrikus alakjában szereplő szög.

Példa. Az $f(z) = e^z$ függvény hatására az egységkör képe?

HF (Nem trivi.)

Állítás. Az $f(z) = e^z$ függvény néhány alaptulajdonsága:

1. Analitikus és $(e^z)' = e^z$.
2. Tetszőleges két z_1 és z_2 komplex számra
$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$
3. Az e^z függvény $2\pi i$ szerint periodikus, azaz
$$e^z = e^{z+2\pi i} \qquad \forall\forall z \in \mathbb{C}.$$

Bizonyítás.

1. Már láttuk.
2. Behelyettesítéssel közvetlenül igazolható.
3. $$e^{(x+iy)+2\pi i} = e^x(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)).$$

Trigonometrikus függvények $\mathbb{C}$-ben

Ismétlés: $\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

A trigonometrikus függvények *kiterjesztése komplex argumentumra*:

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Valós z esetén az eredeti definíciót kapjuk vissza.

Példa. $\sin(i) = \dfrac{e^{-1} - e^{1}}{2i} = \dfrac{e^{-1} - e^{1}}{2}\dfrac{1}{i} = i\,\mathrm{sh}\,(1)$.

$\cos(i) = \cdots = ch(1)$.

Trigonometrikus függvények, folyt.

Állítás. A $\sin(z)$ és $\cos(z)$ függvények alaptulajdonságai:

1. Analitikusak, és

$$\sin'(z) = \cos(z) \qquad \cos'(z) = -\sin(z).$$

2. A kanonikus alakok:

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \sin(x)\mathrm{ch}\,(y) + i\cos(x)\mathrm{sh}\,(y) \\ \cos(z) &= \cos(x)\mathrm{ch}\,(y) - i\sin(x)\mathrm{sh}\,(y) \end{aligned}$$

Bizonyítás. Exponenciális függvény tulajdonságaiból $\surd$

Logaritmus függvény

Az $f(z) = e^z$ függvény inverze?

Mivel $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\ z} > 0$ minden $z \in \mathbb{C}$ $\Longrightarrow$ $w = 0 \notin$ ÉK.

Adott $0 \neq w$. Vajon $w = e^z$ megoldása? $z = x + iy =?$

Trig. alakban: $w = \rho e^{i\theta}$, és $e^z = e^x e^{iy}$ $\Longrightarrow$ $x = \ln \rho$, $y = \theta + 2k\pi$

DE! az $f(z) = e^z$ periodikus $2\pi i$ szerint, ezért z nem egyértelmű.

Tehát a LOGARITMUS sokértékű függvény:

$$\ln(w) = \ln|w| + i(\mathrm{arc}\ (w) + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

A $k = 0$-hoz tartozó érték a FŐÉRTÉK: $\mathrm{Ln}\ (w) = \ln|w| + i\mathrm{arc}\ (w)$

Példa. $\ln(i) = ?$

$$|i| = 1, \quad \mathrm{arc}\,(i) = \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad \ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi).$$

Tétel. A logaritmus függvény alaptulajdonságai:

1. $e^{\ln(z)} = z.$
2. Tetszőleges $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ esetén
$$\ln(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln}\,(z_1) + \mathrm{Ln}\,(z_2) + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$
3. A logaritmus főértéke függvény a $z_0 = 0$-t kivéve mindenütt analitikus és
$$\frac{d}{dz}\mathrm{Ln}\,(z) = \frac{1}{z}.$$

Bizonyítás. HF, nem nehéz.

Hatványfüggvény

Az $f(z) = z^{\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ hatványfüggvény:

$$z^{\lambda} = e^{\lambda \ln z}.$$

Tehát ez is sokértékű függvény .

1.Példa. $1^{i} = e^{i \ln 1} = e^{i(Ln\, 1 + i2k\pi)} = e^{-2k\pi}$. Főértéke $e^{0} = 1$.

2.Példa. $i^{i} = e^{i \ln(i)} = e^{i \cdot i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}$.

Ennek főértéke $\boxed{i^{i} = e^{-\frac{\pi}{2}}.}$ (!!!)

Komplex Jordan görbe

Definíció. $L \subset \mathbb{C}$ JORDAN GÖRBE a komplex számsíkon, ha $\exists \gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ függvény, melyre

$$L = \{\gamma(t) = x(t) + iy(t) \ : \ t \in [\alpha, \beta]\}.$$

Kezdőpont $\gamma(\alpha) = A$, végpont $\gamma(\beta) = B$.

IRÁNYÍTÁS: végpontok sorrendje $\surd$

Fordított irányítás $\quad \longrightarrow \quad -L$ görbe:

$$-L = \{\gamma(t) = x(-t) + iy(-t) \ : \ t \in [-\beta, -\alpha]\}.$$

Definíció. A Jordan görbe ZÁRT, ha $A = B$.

Az IRÁNYÍTÁSA POZITÍV, ha az óramutató járásával egyirányú.

A görbe SIMA, ha az $x, y : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatók.

Állítás. (Ívhossz kiszámítása.) Tfh L sima Jordan görbe

Ennek ívhossza:

$$s(L) = \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| \, dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt.$$

Komplex függvény integrálja

$L \subset \mathbb{C}$ sima Jordan-görbe, f ezen értelmezett komplex függvény.

$$\int_L f(z)dz = ? \quad \textit{hogyan értelmezzük}?$$

Az $[\alpha, \beta]$ intervallum felosztása: $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$.

A görbe megfelelő pontjai:

$$z_k = x_k + iy_k = \gamma(t_k), \qquad k = 0, \ldots, n.$$

Legyen a k-dik ívdarab egy tetszőleges pontja ξ_k.

A felosztáshoz tartozó közelítő összeg:

$$\sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) \cdot f(\xi_k).$$

Definíció. A vonalintegrált az alábbi határérték definiálja,

amennyiben létezik és véges:

$$\lim_{\substack{n\to\infty,\\ \delta_n\to 0}} \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) \cdot f(\xi_k) = \int_L f(z)dz,$$

ahol $\delta_n = \max\left\{s(\widehat{z_{k-1}, z_k}),\ k = 1, \dots n\right\}$.

Ha az L görbe zárt, akkor ezt a jelölést használjuk: $\oint_L f(z)dz$.

Példa. Legyen $f(z) \equiv c$, $c \in \mathbb{C}$ konstans függvény.

L tetszőleges sima zárt görbe.

$$\oint_L c\, dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1})c = \lim_{n\to\infty} c \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) =$$

$$= c \lim_{n\to\infty} (\cancel{z_1} - z_0 + z_2 - \cancel{z_1} + \ldots + z_n - \cancel{z_{n-1}}) = 0,$$

hiszen zárt görbe mentén $z_0 = z_n$. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\oint_L c\, dz = 0.$$

Állítás. A vonalintegrál alaptulajdonságai:

1. **Lineáris**, azaz

$$\int_L (c_1 f(z) + c_2 g(z))\, dz = c_1 \int_L f(z)dz + c_2 \int_L g(z)dz$$

2. Ha megfordítjuk a görbe irányítását, akkor

$$\int_{-L} f(z)dz = -\int_L f(z)dz.$$

3. Ha $L = L_1 + L_2$ (diszjunktak) , akkor

$$\int_L f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz.$$

Állítás. A vonalintegrál alaptulajdonságai (folyt.)

4. Ha f folytonos függvény , akkor létezik a vonalintegrál.

$$\int_L f(z)dz$$

5. Ha f korlátos függvény, vagyis: $|f(z)| \leq M \ \forall z \in L$, akkor

$$\left|\int_L f(z)dz\right| \leq M \cdot s(L),$$

ahol $s(L)$ a görbe ívhossza.

Kiszámítás

Tétel. Legyen az L görbe pontjainak paraméteres megadása:

$$z(t) = x(t) + iy(t) = r(t)e^{i\theta(t)}, \qquad t \in [\alpha, \beta].$$

Tfh. $x(t)$, $y(t)$ ill, $r(t)$, $\theta(t)$ folytonosan differenciálhatóak. Ekkor:

$$\begin{aligned}
\int_L f(z)dz &= \int_\alpha^\beta f(z(t))\, z'(t)\, dt \\
&= \int_\alpha^\beta f(x(t) + iy(t))\, (x'(t) + iy'(t))\, dt \\
&= \int_\alpha^\beta f(r(t)e^{i\theta(t)})\, (r'(t)e^{i\theta(t)} + ir(t)e^{i\theta(t)}\theta'(t))\, dt.
\end{aligned}$$

Newton-Leibniz formula komplex vonalintegrálra

Tétel. Adott az $f : T \to \mathbb{C}$ függvény.

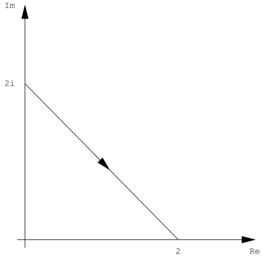
Tegyük fel, hogy létezik analitikus $F : T \to \mathbb{C}$ függvény, melyre

$$F'(z) = f(z) \qquad \forall z$$

Ekkor ha $L \subset T$ sima Jordan görbe, végpontjai A és B akkor :

$$\int_L f(z)dz = F(B) - F(A).$$

1.Példa. $f(z) = e^{iz}$. L a $2i$ pontot a 2 ponttal összekötő szakasz.



Ekkor

$$\int_L e^{iz} dz = \left[\frac{e^{iz}}{i}\right]_2^{2i}$$

$$= i(e^{2i} - e^{-2}).$$

2.Példa. L ugyanaz, mint az előző példában. $f(z) = e^{i\,\overline{z}}$.

L paraméteres felírása: $z(t) = t + i(2-t)$, $t \in [0, 2]$.

Ennek deriváltja $z'(t) = 1 - i$. Így:

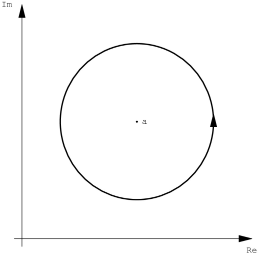
$$\int_L e^{i\,\overline{z}} dz = \int_0^2 e^{i(t-i(2-t))}(1-i)dt = \int_0^2 e^{2-i2t}(1-i)dt = -e^{2i} + e^2.$$

3.Példa. Legyen L az $a \in \mathbb{C}$ körüli r sugarú kör, és

$$f(z) = (z-a)^n, \qquad \text{fix} \ \ n \in \mathbb{Z}.$$

A körvonal paraméteres megadása

$$z(t) = a + r \cdot e^{it}, \qquad t \in [0, 2\pi]. \quad \Longrightarrow \quad z'(t) = r \cdot ie^{it}$$



$$\oint_L (z-a)^n dz = \int_0^{2\pi} (re^{it})^n \, r \cdot ie^{it} dt =$$

$$= r^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt.$$

$$\oint_L (z-a)^n dz = r^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt.$$

Ha $n = -1$, akkor $\oint_L f(z)dz = i \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi i$.

Ha $n \neq -1$, akkor $\oint_L f(z)dz = r^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt = ... = 0$.

Összefoglalva azt kaptuk, hogy

$$\oint_L (z-a)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{ha} \quad n = -1, \\ 0 & \text{ha} \quad n \neq -1. \end{cases}$$

Cauchy-féle alaptétel vonalintegrálra

Tétel. Legyen $T \subset \mathbb{C}$ *egyszeresen összefüggő* tartomány,

és $G \subset T$ sima, zárt görbe.

Tegyük fel, hogy $f : T \to \mathbb{C}$ *analitikus.*

Ekkor

$$\oint_G f(z)dz = 0.$$

A tételt nem bizonyítjuk.

Cauchy-féle alaptétel általánosítása

Tétel. $T \subset \mathbb{C}$ *összefüggő* tartomány, melynek határa a $G \subset T$ görbe.

Tfh T **nem** egyszeresen összefüggő, itt $G_1, \ldots, G_n$ a lyukakat

körbevevő görbék; ugyanolyan irányításúak, mint G.

Legyen $f : T \to \mathbb{C}$ analitikus függvény. Ekkor

$$\oint_G f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{G_k} f(z)dz.$$

Következmény

Legyen $T \subset \mathbb{C}$ *egyszeresen összefüggő tartomány.*

$f : T \to \mathbb{C}$ *analitikus* T*-ben, kivéve a* $z_0 \in T$ *belső pontot.*

Tft létezik z_0*-nak olyan* $\delta > 0$ *sugarú környezete, ahol*

$$|f(z)| \leq M, \qquad \text{ha} \qquad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Legyen $G \subset T$ *zárt görbe* z_0 *körül. Ekkor*

$$\oint_G f(z)dz = 0.$$

Bizonyítás.

Legyen G_ε egy ε sugarú kör z_0 körül, ahol $\varepsilon < \delta$.

Vágjuk ki T-ből ezt a kis kört, tekintsük a $T_0 = T \setminus S(z_0, \varepsilon)$ tartományt.

Ez összefüggő, de nem egyszeresen. Ekkor

$$\oint_G f(z)dz = \oint_{G_\varepsilon} f(z)dz.$$

Ez utóbbit becsülve azt kapjuk, hogy $|\oint_{G_\varepsilon} f(z)dz| \leq M\, 2\pi\varepsilon$, hiszen f a kör mentén korlátos, és a körvonal hossza (a kör kerülete) $2\pi\varepsilon$.

Mivel ε tetszőlegesen kicsi, ezért $\oint_G f(z)dz = 0$.

Cauchy-féle integrál formula

Tétel. $T \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő, $f : T \to \mathbb{C}$ analitikus fv.

Leyen $z_0 \in \mathrm{int}\ T$.

$G \subset T$ zárt görbe, melynek belseje is T-ben van és körbeveszi z_0-t.

Ekkor

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

A fenti integrálban az integrálandó függvénynek $\left(\frac{f(z)}{z - z_0}, \quad z \in T \right)$, *$z_0$-ban szingularitása van.*

Bizonyítás.

$$\oint_G \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_G \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz + \oint_G \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz.$$

Mivel a következő határérték

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0)$$

véges szám, ezért

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

z_0 környezetében korlátos, egyébként pedig differenciálható, és ezért az előző következmény értelmében

$$\oint_G \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz = 0.$$

Speciális eset

Legyen G a z_0 körüli egységkör. Akkor G paraméteresen felírása:

$$z(t) = z_0 + e^{it}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Ekkor $dz(t) = ie^{it}dt$, ezért $z = z(t)$ helyettesítéssel:

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \oint_G \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + e^{it})}{e^{it}} ie^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + e^{it}) dt,$$

azaz a a *középpontbeli* függvényérték a *körvonalon* vett helyettesítési értékek *átlaga*.

Cauchy-féle integrál formula függvény deriváltjára

Tétel. $T \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő, $f : T \to \mathbb{C}$ analitikus fv.

Ekkor f akárhányszor differenciálható T-ben és minden $z_0 \in \operatorname{int} T$-re:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

ahol a G olyan zárt görbe körbveszi z_0-t, és belseje is T-ben van. .

A tételt nem bizonyítjuk. Formálisan $\surd$