Tartalomjegyzék

1. fejezet

Többváltozós valós függvények

1.1. $\mathbb{R}^2$ topológiája

1.1.1. Pontok és pontsorozatok $\mathbb{R}^2$-ben.

A sík pontjait rögzített koordináta-rendszerben megadott rendezett számpárokkal jellemezzük: $P = (x, y)$. Ezen pontok halmazát $\mathbb{R}^2$-vel jelöljük.

1.1.1. Definíció. *Legyen $P = (x, y)$ és $P' = (x', y')$ két pont $\mathbb{R}^2$-ben. Ezek távolsága:*

$$\overline{PP'} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Két pont távolságának jelölésére szokás még az alábbiakat is használni:

$$\rho(P, P'), \qquad \|P - P'\|.$$

Az origóból az (x, y) pontba mutató vektor hossza

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Használni fogjuk a lineáris algebrából ismert háromszög egyenlőtlenséget, miszerint

$$\|(x, y) + (x', y')\| \leq \|(x, y)\| + \|(x', y')\|.$$

1.1.2. Definíció. *Legyen adott a $C \epsilon \mathbb{R}^2$ pont, $C = (A, B)$, és az $\varepsilon > 0$ valós szám. A C pont körüli ε-sugarú gömböt így definiáljuk:*

$$S(C, \varepsilon) = \{P \epsilon \mathbb{R}^2 : \overline{PC} < \varepsilon\}.$$

Ezzel egy körlemezt kapunk C középponttal.

1.1.3. Definíció. *Pontsorozat alatt síkbeli pontok sorozatát értjük:*

$$P_n = (x_n, y_n), \qquad n = 1, 2 \ldots$$

1. *Példa.* Két pontsorozat: $P_n^{(1)} = (n, n^2)$, illetve $P_n^{(2)} = ((-1)^n, 2)$.

Megjegyzés: A sorozat tagjai nem feltétlenül különböznek.

1.1.4. Definíció. *A* (P_n) *sorozat korlátos, ha létezik egy olyan* $S(C, \varepsilon)$ *gömb, amely a sorozat minden elemét tartalmazza. Tehát ez azt jelenti, hogy* (P_n) *korlátos, ha létezik* $C = (A, B)$ *és* $\varepsilon > 0$ *hogy minden* $P_n = (x_n, y_n)$*-re teljesül, hogy*

$$\sqrt{(x_n - A)^2 + (y_n - B)^2} < \varepsilon.$$

1. *Példa.* (folytatás) $P_n^{(1)} = (n, n^2)$ nem korlátos; $P_n^{(2)} = ((-1)^n, 2)$ korlátos.

1.1.5. Definíció. *A* (P_n) *sorozat konvergens és határértéke* Q*, ha*

$$\lim_{n \to \infty} \|P_n - Q\| = 0.$$

Ezt így jelöljük:

$$\lim_{n \to \infty} P_n = Q.$$

Ezzel ekvivalens definíció:

1.1.6. Definíció. *A* (P_n) *sorozat konvergens és határértéke* Q *ha minden* $\varepsilon > 0$*-hoz létezik egy* $N(\varepsilon)$ *küszöbindex, hogy minden* $n \geq N(\varepsilon)$ *esetén:*

$$\|P_n - Q\| < \varepsilon.$$

Másképp fogalmazva: Minden $\varepsilon > 0$ esetén az $S(Q, \varepsilon)$ gömbön kívül csak véges sok pont van (véges sok indexű).

Következmény. Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos.

2. *Példa.* Legyen $P_n = (e^{-n/4} \cos(n), e^{-n/4} \sin(n))$, $n = 1, 2, \ldots$. Ekkor

$$\|P_n - (0,0)\| = \|P_n\| = \sqrt{e^{-n/2} \cos^2 n + e^{-n/2} \sin^2 n} = \sqrt{e^{-n/2}} = e^{-n/4}.$$

Így

$$\lim_{n \to \infty} P_n = (0, 0).$$

1.1.1. Állítás. *Tekintsük a* $P_n = (x_n, y_n)$ *elemekből álló sorozatot. Ekkor az alábbi két állítás ekvivalens:*

1. (P_n) *konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty} P_n = Q = (x, y).$$

2. Az (x_n) *és* (y_n) *sorozatok konvergensek és*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x; \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Bizonyítás. 1. $\Rightarrow$ 2. A pontsorozat konvergenciája miatt minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik egy $N(\varepsilon)$ index, hogy $\|P_n - Q\| < \varepsilon$, ha $n \geq N(\varepsilon)$. Mivel

$$|x_n - x| < \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2},$$

ezért $|x_n - x| < \varepsilon$ és hasonlóan $|y_n - y| < \varepsilon$ is teljesül.

2. $\Rightarrow$ 1. Tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik egy küszöbindex, hogy minden $n \geq N$-re:

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \qquad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Ekkor $(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2 < \varepsilon^2$ így

$$\|P_n - Q\| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon.$$

Cauchy-féle feltétel

1.1.7. Definíció. *A* (P_n) *sorozat teljesíti a Cauchy-féle feltételt, ha minden* $\varepsilon > 0$*-hoz létezik olyan* $N(\varepsilon)$ *küszöbindex, amelyre minden* $n, m \geq N$ *esetén*

$$\|P_n - P_m\| < \varepsilon.$$

1.1.2. Állítás. *A* (P_n) *pontsorozat pontosan akkor konvergens, ha teljesíti a Cauchy-féle feltételt.*

Bizonyítás. Csak az egyik irányt bizonyítjuk. Belátjuk, hogy ha a sorozat konvergens, akkor teljesíti a Cauchy-féle feltételt. A konvergencia miatt ε-hoz létezik N küszöbindex, amelyre

$$\|P_n - P\| < \varepsilon/2$$

minden $n \geq N$ esetén. Ekkor ha $n, m \geq N$, akkor a háromszögegyenlőtlenséget felhasználva azt írhatjuk, hogy

$$\|P_n - P_m\| < \|P_n - P\| + \|P - P_m\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

1.1.1. Tétel. *(Bolzano-Weierstrass-tétel) Legyen (P_n) korlátos pontsorozat a síkon. Ekkor létezik konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Ha (P_n) korlátos és $P_n = (x_n, y_n)$, akkor (x_n) és (y_n) is korlátos sorozatok. Ekkor létezik (x_n)-nek konvergens részsorozata, legyen ez (x_{m_k}), illetve létezik (y_{m_k})-nak is konvergens részsorozata, ez legyen (y_{n_k}). Ekkor nyilván $((x_{n_k}, y_{n_k}))$ is konvergens.

1.1.2. Halmazok $\mathbb{R}^2$-ben

$\mathbb{R}^2$ részhalmazait tartományoknak is nevezzük.

Példa. Téglalap. (Ez a kétdimenziós intervallum.) Legyenek $a < b$ és $c < d$ rögzített valós számok:

$$T = \{(x, y) : \ a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}$$

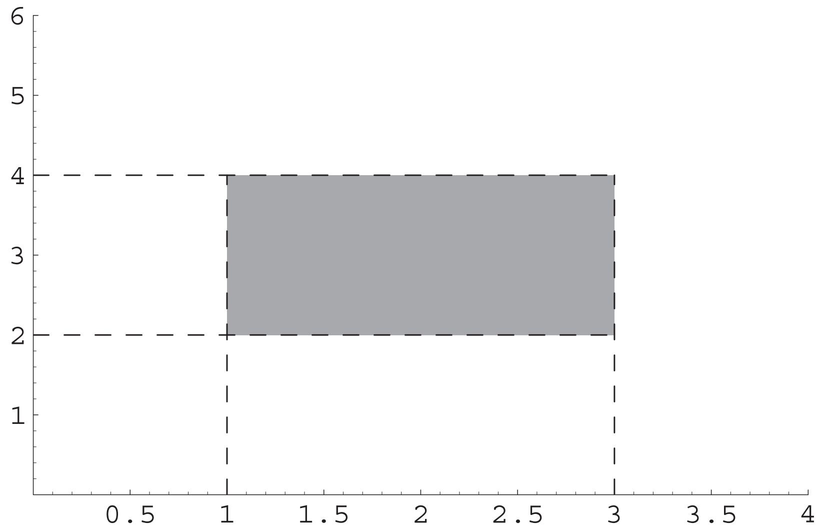
A kétdimenziós intervallumot direkt szorzat alakban is írhatjuk: $[a, b] \times [c, d]$.

Példa. Gömb. (Ez kétdimenzióban egy körlemeznek felel meg.) Legyen $\varepsilon > 0$ valós szám és $C \epsilon \mathbb{R}^2$ síkbeli pont adottak,

$$S(C, \varepsilon) = \{(x, y) : \sqrt{(x - A)^2 + (y - B)^2} < \varepsilon\}.$$

Emlékeztetünk arra, hogy egydimenzióban az a pont környezetei az a középpontú $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ intervallumok voltak, tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén. Ezt általánosítjuk.

1.1.8. Definíció. *Egy $P = (x, y)$ pont környezetei azon $S \subset \mathbb{R}^2$ tartományok, melyek P közeppontú gömbök.*



1.1. ábra. Kétdimenziós intervallum

Tekintsünk egy teszőleges $S \subset \mathbb{R}^2$ tartományt.

1.1.9. Definíció. - *Azt mondjuk, hogy egy $Q \epsilon \mathbb{R}^2$ belső pontja S-nek, ha Q-nak van olyan U környezete, melyre $U \subset S$.*

- *Azt mondjuk, hogy egy $Q \epsilon \mathbb{R}^2$ külső pontja S-nek, ha Q-nak van olyan U környezete, melyre $U \cap S = \emptyset$.*

- *Azt mondjuk, hogy egy $Q \epsilon \mathbb{R}^2$ határpontja S-nek, ha a Q pontnak minden U környezete rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy van olyan $P' \epsilon U$ pontja melyre $P' \epsilon S$ és van olyan $P'' \epsilon U$ pontja melyre $P'' \notin S$.*

1.1.1. Következmény. *Tetszőleges S halmaz esetén a síkot 3 diszjunkt részre oszthatjuk:*

- *külső pontok, ezek halmazát* $\text{ext}(S)$ *jelöli. (Ez az 'exterior' szóból ered.)*

- *belső pontok, ezek halmazát* $\text{int}(S)$ *jelöli. (Ez az 'interior' szóból ered.)*

- *határpontok, ezeket halmazát ∂S jelöli. Lehetnek határpontok, amelyek elemei az adott halmaznak, és lehetnek, amelyek nem elemei.*

1.1.10. Definíció. *Az S halmaz zárt, ha minden határpontját tartalmazza. Az S halmaz nyílt, ha minden pontja belső pont. Az S halmaz lezárása:*

$$\overline{S} = S \cup \partial S.$$

Példa. A gömb nyílt halmaz. Ennek határpontjai:

$$\partial S(C, r) = \{P : \ \|P - C\| = r\},$$

és így lezárása:

$$\overline{S(C, r)} = \{P : \ \|P - C\| \leq r\}.$$

Példa. Legyen $S = \{(x, y) : \ x, y \epsilon \mathbb{Q}\}$ a sík racionális koordinátájú pontjainak halmaza. Ekkor a halmaz lezárása $\overline{S} = \mathbb{R}^2$.

1.1.11. Definíció. *P az S halmaz torlódási pontja, ha létezik olyan $(P_n) \subset S$ sorozat, melyre $P_n \neq P$ és $\lim_{n \to \infty} P_n = P$.*

Torlódási pontok lehetnek belső pontok és határpontok. Zárt halmaz minden torlódási pontját tartalmazza.

1.1.12. Definíció. *Legyen P és P' két $\mathbb{R}^2$-beli pont. Az ezeket összekötő folytonos vonal egy olyan*

$$\gamma : [\alpha, \beta] \ \rightarrow \ \mathbb{R}^2$$

függvény, mely egy korlátos és zárt $[\alpha, \beta]$ valós intervallumon van értelmezve és értékkészlete $\mathbb{R}^2$-beli. Továbbá

$$\gamma(\alpha) = P, \qquad \gamma(\beta) = P'.$$

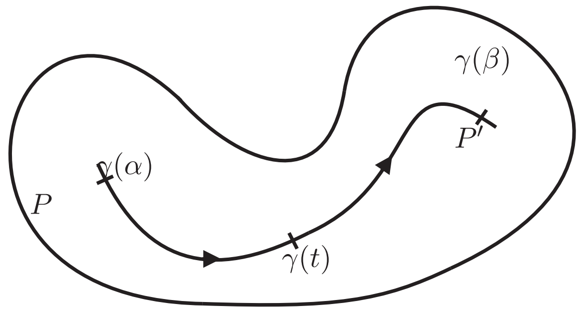
A $\gamma(t) \epsilon \mathbb{R}^2$ pont koordinátáit jelölje

$$\gamma(t) =: (x(t), y(t)).$$

Feltesszük, hogy ezek az $(x(t),\ y(t))$ koordináta-függvények,

$$x, y : [\alpha, \beta] \ \rightarrow \ \mathbb{R}$$

folytonosak.



1.2. ábra. Két pontot összekötő vonal.

Egy $\{\gamma(t) : t\epsilon[\alpha, \beta]\}$ vonalat is $\mathbb{R}^2$-beli részhalmaznak tekintünk, természetes módon.

1.1.13. Definíció. *Az $S \subset \mathbb{R}^2$ tartományt összefüggőnek nevezzük, ha bármely két pontját kiválasztva tartalmaz egy őket összekötő folytonos vonalat.*

1.1.14. Definíció. *Legyen $P = (x, y)$ és $P' = (x', y')$ két $\mathbb{R}^2$-beli pont. A két pontot összekötő szakaszt az alábbi*

$$\gamma : [0, 1] \ \to \mathbb{R}^2$$

függvény írja le:

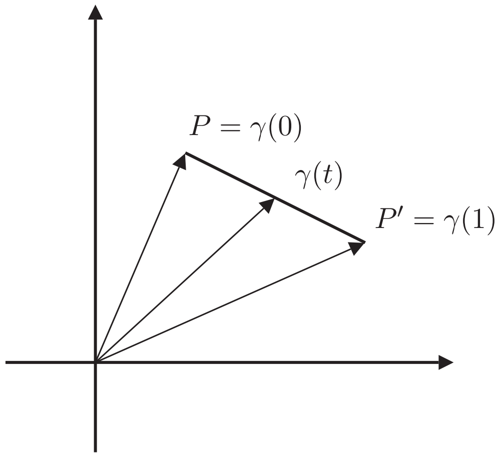
$$\gamma(t) := P + t(P' - P).$$

Speciálisan tehát $\gamma(0) = P$, $\gamma(1) = P'$.

A szakasz is folytonos vonal, mégpedig az alábbi koordináta-függvényekkel:

$$\begin{aligned} x(t) &= x + t(x' - x), \\ y(t) &= y + t(y' - y). \end{aligned}$$

1.1.15. Definíció. *Az $S \subset \mathbb{R}^2$ tartományt konvexnek nevezzük, ha bármely két pontjával együtt az őket összekötő szakaszt is tartalmazza.*



1.3. ábra. Két pontot összekötő szakasz.

1.1.3. Polárkoordináták

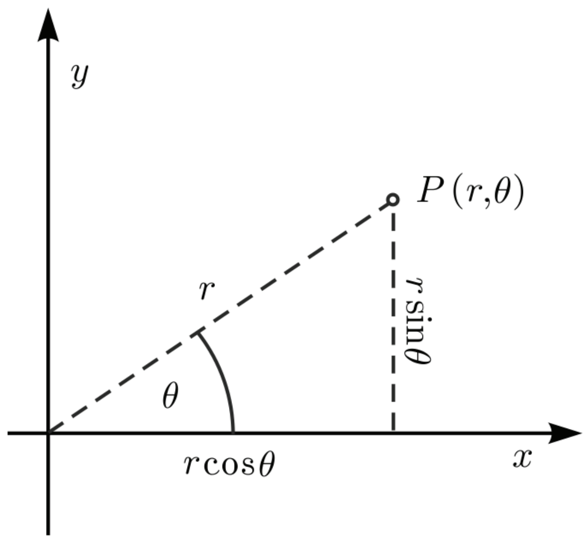
A síkbeli pontokat nem csak a megszokott Descartes-féle koordinárendszerben tudjuk megadni. Sokszor hasznos lesz a most bevezetésre kerülő polárkoordináták használata.

1.1.16. Definíció. *Egy adott $(x, y)\epsilon\mathbb{R}^2$ pont polárkoordinátái (r, θ), melyeket így definiálunk:*

- *r: a pont origótól vett távolsága,*
- *θ: az origóból az adott pontba mutató vektornak az x tengely pozitív részével bezárt szöge.*

Így tehát a polárkoordinátákra $r\epsilon\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\theta\epsilon[0, 2\pi)$.

Ha r és θ adottak, akkor $x = r\cos(\theta)$; $y = r\sin(\theta)$. A fenti hozzárendelés egy-egyértelmű megfeleltetés, kivéve a $(0, 0)$ pontot.



1.4. ábra. A polárkoordináták értelmezése.

1.1.4. Általánosítás $\mathbb{R}^n$-re

$\mathbb{R}^n$ elemeit a rendezett szám n-esek jelentik: $P = (x_1, \ldots, x_n) \epsilon \mathbb{R}^n$, $P' = (x'_1, \ldots, x'_n) \epsilon \mathbb{R}^n$. Ezeket az n dimenziós tér pontjainak hívjuk.

1.1.17. Definíció. *A két pont távolsága:*

$$\|P - P'\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x'_i)^2} = \left((x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \cdots + (x_n - x'_n)^2\right)^{1/2}.$$

A távolságot szoktuk így is jelölni: $\rho(P, P')$.

1.1.18. Definíció. *Egy* $P = (x_1, \ldots, x_n) \epsilon \mathbb{R}^n$ *pont környezetei* n*-dimenziós gömbök, melyeket így értelmezünk:*

$$S(P, \varepsilon) = \left\{ Q = (x'_1, \ldots, x'_n) \epsilon \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^{n} (x_k - x'_k)^2 < \varepsilon^2 \right\}.$$

1.2. Kétváltozós függvények

Adott $S \subset \mathbb{R}^2$ tartomány. $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, amely S elemeihez egy valós számot rendel. Értelmezési tartományát D_f -fel jelöljük (="domain"), értékkészletét R_f-fel (="range").

Függvény megadása azt jelenti, hogy megadjuk az értelmezési tartományt (ha ez megváltozik, már egy másik függvényt adunk meg) és a hozzárendelés módját. Ez mindig egyértelmű, például az $u = \arctan(y/x)$ függvény esetében meg kell adni, hogy a főág értékére gondolunk.
Elnevezések: (x, y): független változó, u: függő változó.

Legegyszerűbb példák:

1. *Lineáris függvény.*

$$f(x, y) = ax + by + c,$$

ahol $a, b, c \epsilon \mathbb{R}$ rögzítettek. Értelmezési tartománya $\mathbb{R}^2$.

2. *Másodfokú polinom.*

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f,$$

ahol $a, b, c, d, e, f \epsilon \mathbb{R}$ rögzítettek. Értelmezési tartománya $\mathbb{R}^2$.

3. *Polinom*okat két dimenzióban úgy definiáljuk, mint monomiálok összege. Egy monomiál általános alakja:

$$a_{mn} x^m y^n.$$

Együtthatója $a_{mn} \epsilon \mathbb{R}$, foka a benne levő fokok összege: $m + n$. Egy polinom fokát úgy definiáljuk, mint a legmagasabb fokú monomiáljának foka.

Egy polinom *homogén*, ha a polinomban szereplő monomiálok foka ugyanaz. Például homogén másodfokú polinom

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2.$$

További kétváltozós függvények konstrukciója az ismert egyváltozós függvények segítségével történhet, például:

$$u = \sin(xy) \qquad vagy \qquad u = \ln(y^2 + \cos(x/2)).$$

1.2.1. Geometriai reprezentáció

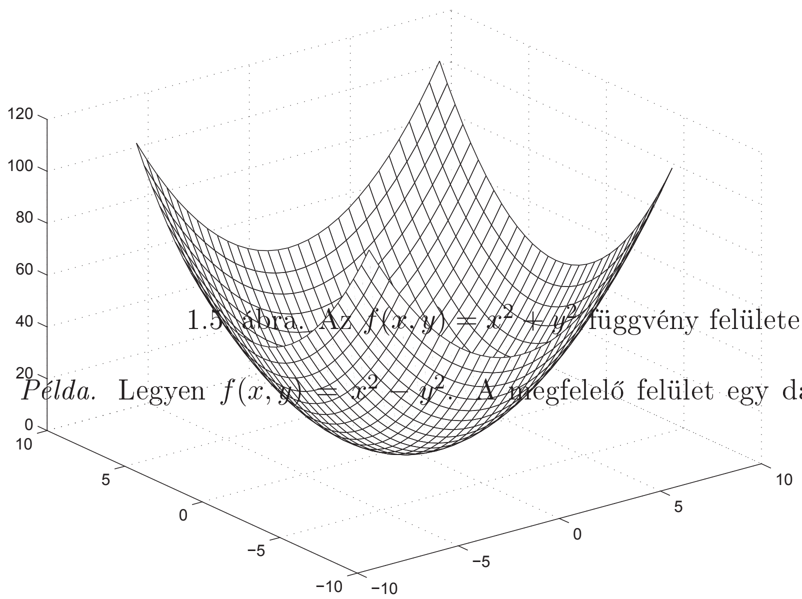
Ahogy az egyváltozós függvényt görbe segítségével tudtuk reprezentálni, a kétváltozós függvényt felületként fogjuk megadni. Ehhez tekintjük a háromdimenziós koordinátarendszert, melyben a koordináta tengelyek x, y és u. A függvény értelmezési tartományának tetszőleges (x, y) pontja fölött kijelöljük azt a P pontot, melynek harmadik koordinátája $u = f(x, y)$. Ha (x, y) bejárja a függvény értelmezési tartományát, akkor a megfelelő P pontok egy felületet fognak megadni.

Tehát az $f : S \to \mathbb{R}$ függvényt a térben az (x, y, u) számhármasok írják le, ahol $u = f(x, y)$. Az

$$\{(x, y, u) : \; u = f(x, y), \; (x, y) \epsilon S\}$$

pontok felületet alkotnak a térben.

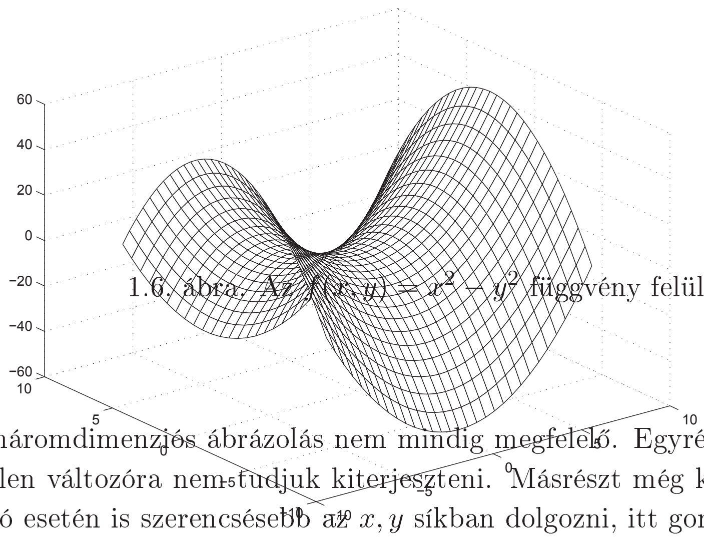
Példa. Legyen $f(x, y) = x^2 + y^2$. A felület egy darabja az 1.5. ábrán látható.



1.5. ábra. Az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény felülete.

Példa. Legyen $f(x, y) = x^2 - y^2$. A megfelelő felület egy darabja az 1.6.

ábrán látható.



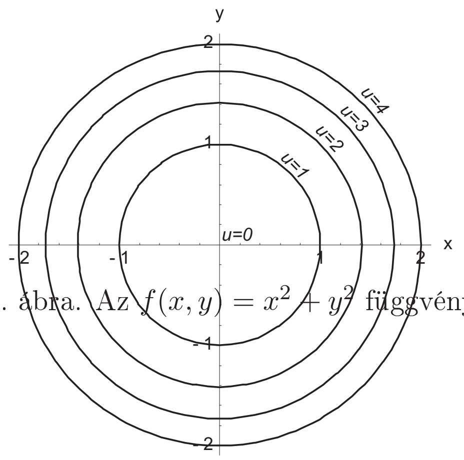
1.6. ábra. Az $f(x, y) = x^2 - y^2$ függvény felülete.

A háromdimenziós ábrázolás nem mindig megfelelő. Egyrészt ezt több független változóra nem tudjuk kiterjeszteni. Másrészt még két független változó esetén is szerencsésebb az x, y síkban dolgozni, itt gond nélkül tudunk rajzolni. Ehhez ad segítséget a szintvonalak segítségével történő ábrázolás. Ekkor a síkban ábrázoljuk azokat az (x, y) pontokat, melyekre $f(x, y) = k$ valamely rögzített $k \in \mathbb{R}$ mellett.

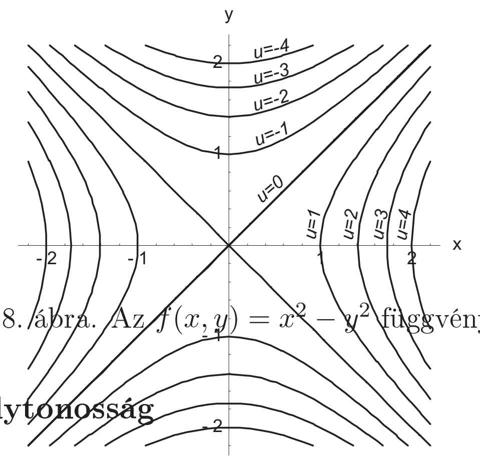
Példa. Legyen $f(x, y) = x^2 + y^2$. A szintvonalak koncentrikus körök, melyekből néhány az 1.7 ábrán látható.

Példa. Legyen $f(x, y) = x^2 - y^2$. A szintvonalak hiperbolák és egyenesek, melyekből néhány a 1.8 ábrán látható.

A szintvonalakkal történő ábrázolásnak egyik előnye, hogy kiterjeszthető háromváltozós $f(x, y, z)$ függvényekre. Ekkor szintvonalak helyett $k = f(x, y, z)$ szintfelületeket kapunk, ahol k tetszőleges konstans.



1.7. ábra. Az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény szintvonalai



1.8. ábra. Az $f(x, y) = x^2 - y^2$ függvény szintvonalai

1.2.2. Folytonosság

Azt fogjuk megfogalmazni, hogy mit jelent az a tulajdonság, hogy egy f függvény folytonos a $P_0 = (x_0, y_0)$ pontban. Heurisztikusan elképzelve azt várjuk, hogy ha (x, y) közel van (x_0, y_0)-hoz, akkor $f(x, y)$ is közel van $f(x_0, y_0)$-hoz.

1.2.1. Definíció. *Legyen* (x_0, y_0) *az* f *függvény értelmezési tartományá-*

nak egy pontja. Az f függvény folytonos (x_0, y_0)-ban, ha $f(x_0, y_0)$ tetszőleges U környezezetéhez létezik (x_0, y_0)-nak olyan V környezete, hogy minden $(x, y)\epsilon V$, $(x, y)\epsilon D_f$ esetén $f(x, y)\epsilon U$.

Figyelembe véve a környezet definícióját, ezt így átfogalmazhatjuk:

1.2.2. Definíció. *Legyen $P_0 = (x_0, y_0)$ az f függvény értelmezési tartományának egy pontja. Az f függvény folytonos az (x_0, y_0) pontban, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik egy $\delta > 0$ szám, melyre*

$$\forall(x, y)\epsilon D_f, \qquad \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

esetén

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

teljesül.

1.2.3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az f függvény sorozatfolytonos az értelmezési tartomány P_0 pontjában, ha minden $(P_n) \subset D_f$ sorozatra, melyre*

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0$$

teljesül, hogy

$$\lim_{n\to\infty} f(P_n) = f(P_0).$$

A kétfajta fogalom ekvivalenciájáról szól az alábbi tétel:

1.2.1. Tétel. *Az f függvény akkor és csakis akkor folytonos P_0-ban, ha ott sorozatfolytonos.*

Bizonyítás. Teljesen analóg az egyváltozós esettel, az olvasóra bízzuk.

Könnyen látható a fenti tétel alapján, hogy folytonos függvények összege, szorzata, skalárszorosa is folytonos lesz.

1.2.4. Definíció. *Ha egy függvény értelmezési tartományának egy pontjában nem folytonos, akkor ott szakadása van.*

Példák folytonosságra:

1. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x}{y} & \text{ha} \quad y \neq 0 \\ \\ 0 & \text{ha} \quad y = 0 \end{cases}.$$

Értelmezési tartománya $\mathbb{R}^2$, szakadás az $y = 0$ egyenes mentén van, hiszen a függvény tetszőleges (x, y) pontban folytonos, kivéve ha $y = 0$.

2. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

A függvény folytonos, ha sem x sem y nem 0. Ha $y \neq 0$, akkor $f(x, y)$, mint x függvénye folytonos, és

$$\lim_{x \to 0} f(x,y) = 0.$$

Ha $x \neq 0$, akkor $f(x, y)$, mint y függvénye folytonos, és

$$\lim_{y \to 0} f(x,y) = 0.$$

Tekintsük az $x = y$ egyenest. Ezen egyenes mentén $f(x, x) \equiv 1$. Tehát ha ennek az egyenesnek a mentén egy sorozattal tartunk 0-ba, akkor a függvényértékek sorozata azonosan 1 lesz, így a határérték is. f tehát *nem folytonos a* $(0, 0)$*-ban.*

3. Példa. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Folytonos-e a $(0, 0)$ pontban?

Igen. A sorozatfolytonosságot igazoljuk. Legyen (P_n) egy olyan sorozat, melyre $\lim_{n\to\infty} P_n = 0$. Legyenek (P_n) polárkoordinátái $P_n = (r_n, \theta_n)$.

Ekkor nyilván $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, míg a (θ_n) sorozat bármilyen lehet. A fenti képletnek megfelelően $(x,y) \neq (0,0)$ esetén $f(x,y)$ így írható:

$$f(x,y) = \frac{r^2\cos^2(\theta)\, r^2\sin^2(\theta)}{r^2} = r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta).$$

Ezért valóban

$$\lim_{n\to\infty} f(P_n) = 0,$$

tehát a függvény valóban folytonos.

1.2.2. Tétel. *(Bolzano tétel) Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, melynek értelmezési tartomámya $S \subset \mathbb{R}^2$ összefüggő. Legyen a tartomány két tetszőleges pontja $P = (x,y)$ és $P' = (x',y')$, melyekre*

$$a = f(x,y) < f(x',y') = b.$$

Ekkor tetszőleges $c \epsilon (a,b)$ számhoz létezik egy olyan $Q = (x_0,y_0) \epsilon S$ pont, melyre $f(x_0,y_0) = c$.

Bizonyítás. Az S tartomány összefüggő, ezért létezik P-t és P'-t összekötő S-beli folytonos görbe. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan

$$\begin{aligned} \gamma : [\alpha,\beta] &\;\to\; \mathbb{R}^2 \\ t &\;\mapsto\; (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

függvény, melyre

$$\gamma(\alpha) = (x,y), \qquad \gamma(\beta) = (x',y'),$$

és az $(x(t),\ y(t))$ koordináta-függvények folytonosak. Vezessük be az

$$F(t) := f(x(t), y(t))$$

valós függvényt. $F : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ folytonos, melyre $F(\alpha) = a$ és $F(\beta) = b$. Így az egydimenziós folytonos függvényekre ismert Bolzano-tétel szerint létezik olyan $\xi \epsilon (\alpha,\beta)$, melyre $F(\xi) = c$. Ezért a $Q := \gamma(\xi) \epsilon S$ pontra $f(Q) = c$.

1.2.5. Definíció. *Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ adott függvény, $S \subset \mathbb{R}^2$ tartomány. Azt mondjuk, hogy f egyenletesen folytonos S-ben, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy ha $P, P' \epsilon S$ pontokra*

$$\|P - P'\| < \delta \qquad akkor \qquad |f(P) - f(P')| < \varepsilon.$$

A $\delta = \delta(\varepsilon)$ számot az ε-hoz tartozó folytonossági modulusnak hívjuk.

1.2.6. Definíció. *Az $f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény Lipschitz folytonos, ha létezik egy olyan $L > 0$ szám, melyre*

$$|f(P) - f(P')| \leq L \cdot \|P - P'\|$$

teljesül minden $P, P' \epsilon S$ pontra. Az L számot Lipschitz-konstansnak hívjuk.

Megjegyzés. Egyenletes folytonosságot *tartományban* definiáltuk, nem pedig pontban.

1.2.1. Állítás. *Ha f egyenletesen folytonos S-n, akkor S minden pontjában folytonos. Ha f Lipschitz folytonos egy tartományban, akkor ott egyenletesen is folytonos.*

Bizonyítás. Tetszőleges ε számhoz a $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$ megfeleltetés jó lesz.

1.2.3. Korlátos és zárt halmazon folytonos függvények

1.2.3. Tétel. *Legyen S korlátos és zárt tartomány $\mathbb{R}^2$-ben. Tegyük fel, hogy $f : S \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen is folytonos.*

Bizonyítás. Indirekt, "lemásoljuk" az egyváltozós bizonyítást. Tegyük fel, hogy a függvény nem egyenletesen folytonos. Ez azt jelenti, hogy van olyan $\varepsilon > 0$, melyre nincs "jó" δ, azaz minden hogy $\delta > 0$-hoz léteznek P, P' pontok, melyekre

$$\|P - P'\| < \delta, \qquad \text{de} \qquad |f(P) - f(P')| > \varepsilon.$$

Tekintsük ezt az ε-t. Ekkor a $\delta = 1/n$-hez is létezik P_n, P'_n, hogy:

$$\|P_n - P'_n\| < \frac{1}{n}, \qquad |f(P_n) - f(P'_n)| > \varepsilon.$$

Vizsgáljuk meg a (P_n) és (P'_n) sorozatokat.

Mivel S korlátos, mind a két sorozat korlátos, ezért létezik konvergens részsorozatuk. Legyenek ezek az egyszerűség kedvéért maguk az eredeti sorozatok:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P, \qquad \lim_{n\to\infty} P'_n = P'.$$

Belátjuk, hogy $P = P'$. Ezek távolságát becsüljük a háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával:

$$\|P - P'\| = \|P - P_n + P_n - P'_n + P'_n - P'\| \leq$$

$$\leq \|P - P_n\| + \|P_n - P'_n\| + \|P'_n - P'\|.$$

Legyen $\eta > 0$ tetszőleges. Ehhez létezik N küszöbindex, hogy ha $n > N$ akkor

$$\|P_n - P\| < \frac{\eta}{3}, \qquad \|P'_n - P'\| < \frac{\eta}{3}, \qquad \frac{1}{n} < \frac{\eta}{3}$$

Ezért az előző egyenlőtlenséget folytatva:

$$\|P - P'\| \leq \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} = \eta$$

Így a $P = P'$ pont az S tartománynak egy toródási pontja, és S zártsága miatt $P \epsilon S$. Itt a függvény folytonos. A kiválasztott $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy $\forall Q$-ra: $\|Q - P\| < \delta$-ból következik, hogy $|f(Q) - f(P)| < \varepsilon$, ami ellentmond az indirekt feltételnek. Ezzel az tételt beláttuk.

1.2.4. Tétel. *(Weierstrass I. tétele) Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, ahol $S \subset \mathbb{R}^2$ korlátos és zárt. Ekkor f korlátos, azaz értékkészlete korlátos.*

Bizonyítás. Indirekt. Tegyük fel, hogy f értékkészlete nem korlátos. Ez azt jelenti, hogy minden n természetes számnál nagyobb értéket felvesz valamely $P_n = (x_n, y_n) \epsilon S$ pontban, azaz

$$|f(x_n, y_n)| > n, \qquad n \epsilon \mathbb{N}.$$

Mivel a (P_n) pontsorozat része a korlátos S halmaznak, ezért a pontsorozat is korlátos. Kiválasztható belőle konvergens rész-sorozat, legyen ez (P_{n_k}). Ennek határértékét jelölje P_0. S zártsága miatt $P_0 \epsilon S$, és itt f folytonos. Ezért egyrészt a folytonosság miatt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{n_k}, y_{n_k}) < \infty,$$

másrészt az indirekt feltevés szerint

$$|f(x_{n_k}, y_{n_k})| > n_k, \qquad n_k \to \infty,$$

ami ellentmondás.

1.2.5. Tétel. *(Weierstrass II. tétele) Korlátos és zárt tartományon folytonos függvény felveszi a maximumát és minimumát.*

Bizonyítás. Legyen $H := \{f(x,y) : \ (x,y)\epsilon S\}$. Jelölje ennek supremumát $\beta = \sup H$. A supremum definíciója miatt létezik $(h_n)\subset H$ sorozat, hogy

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \beta.$$

Tudjuk, hogy $h_n = f(x_n, y_n)$, ahol $P_n = (x_n, y_n)$. A (P_n) sorozat S-ben van, ezért korlátos, tehát van konvergens részsorozata, legyen ez (P_{n_k}).

$$\lim_{k\to\infty} P_{n_k} = P\epsilon S,$$

hiszen S zárt. Ebben a P pontban a függvény folytonos, tehát

$$\lim_{k\to\infty} f(P_{n_k}) = f(P).$$

Másrészt

$$\lim_{k\to\infty} f(P_{n_k}) = \beta,$$

hiszen részsorozata $(f(x_n, y_n))$-nek, ezért $\beta = f(P) < \infty$.

1.2.4. Határérték

1.2.7. Definíció. *Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény, $P_0 = (x_0, y_0)\epsilon\mathbb{R}^2$ az értelmezési tartomány egy torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke a $P_0 = (x_0, y_0)$ pontban L, azaz*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L,$$

ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta > 0$ szám, hogy ha

$$(x,y)\epsilon S, \qquad 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta,$$

akkor $|f(x,y) - L| < \varepsilon$

Az egydimenziós esethez hasonlóan most is megfogalmazható az *átviteli elv*:

1.2.2. Állítás.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

pontosan akkor teljesül, ha $\forall P_n = (x_n, y_n)\epsilon S$, $P_n \neq P_0$ sorozatra, melyre

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0$$

teljesül, hogy

$$\lim_{n\to\infty} f(P_n) = L.$$

1. *Példa.* Legyen $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0), x\epsilon\mathbb{R}\}$, és tekintsük azt az $f : S \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre

$$f(x,y) = e^{-x^2/y},$$

ha $y \neq 0$. Legyen $P_0 = (x_0, 0)$ pont, ahol $x_0 \neq 0$ rögzített. Ekkor

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} e^{-x^2/y} = \lim_{y\to 0} e^{-x_0^2/y} = 0$$

Ha az $y = kx^2$ parabola mentén tartunk a 0-hoz, azaz tekintünk egy $(x_n, kx_n^2) = P_n$ sorozatot, melyre $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Ekkor minden n-re

$$f(P_n) = e^{-x_n^2/kx_n^2} = e^{-1/k}.$$

Tehát a $(0,0)$-beli határérték függ a sorozat választásától, ezért a függvény határértéke nem létezik a $(0,0)$ pontban.

2. *Példa.* Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x+2y}{3x-y} & \text{ha} \quad 3x-y \neq 0 \\ \\ 0 & \text{ha} \quad 3x-y = 0 \end{cases}$$

Legyen $a_n = 1/n$, és az egyik pontsorozat

$$P_n = (a_n, a_n^2).$$

Ekkor

$$f(P_n) = \frac{n+2}{3n-1},$$

és így tehát

$$\lim_{n\to\infty} P_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} f(P_n) = \frac{1}{3}.$$

Legyen egy másik pontsorozat

$$P_n' = (a_n^2, a_n).$$

Ekkor

$$f(P_n') = \frac{1+2n}{3-n},$$

és így tehát

$$\lim_{n\to\infty} P_n' = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} f(P_n) = -2.$$

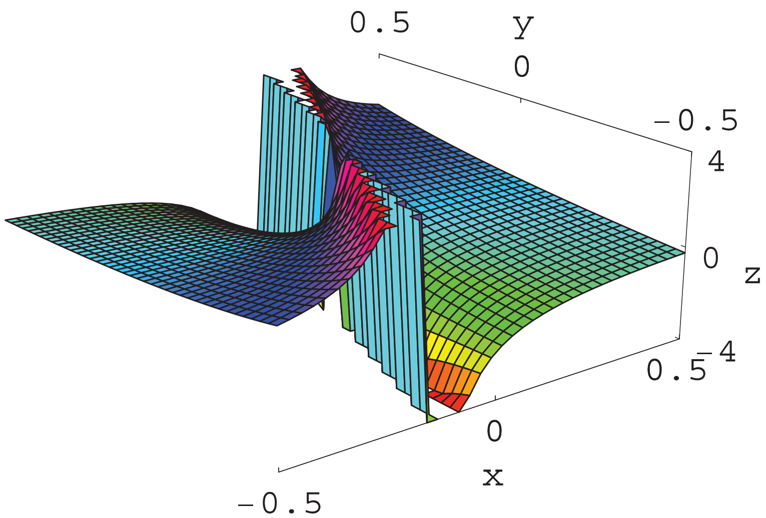
Ezért az origóban nincs határértéke a függvénynek. A fenti gondolatmenetben lényegében az történik, hogy a $(0,0)$-beli határértéket kétfajta közelítéssel próbáljuk meg kiszámolni. Egyrészt

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x+2y}{3x-y} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}.$$

Másrészt

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x+2y}{3x-y} = \lim_{y\to 0} \frac{2y}{-y} = -2$$

Tehát mivel $-2 \neq 1/3$ ezért nincs határérték. Megjegyezzük, hogy ha a fenti határértékek egyenlőek lennének, az még nem volna elég a kétdimenziós határérték létezéséhez.



1.9. ábra. A 2. példában szereplő függvény a 0 körül

1.3. Differenciálszámítás

1.3.1. Parciális deriváltak

1.3.1. Definíció. *Legyen* $f : S \to \mathbb{R}$ *kétváltozós valós függvény. Legyen* (x_0, y_0) *az* S *halmaz belső pontja. Ha létezik a*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

véges határérték, akkor ezt a mennyiséget a függvény x *szerinti parciális deriváltjának nevezzük az* (x_0, y_0) *pontban. Ezt így jelöljük:*

$$f'_x(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0).$$

Ha létezik a

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

véges határérték, akkor ezt a mennyiséget a függvény y *szerinti parciális deriváltjának nevezzük az* (x_0, y_0) *pontban. Ezt így jelöljük:*

$$f'_y(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0).$$