Megjegyzés. A könnyebb átláthatóság kedvéért a fenti formula argumentumok nélkül:

$$\big(f \circ (\varphi, \psi)\big)' = f'_x \varphi' + f'_y \psi'$$

Előadáson elmondom a bizonyítást. Aki nem jegyzeteli le, bizonyítsa be (nem nehéz HF).

Példa. Kétváltozós f függvény α irány menti deriváltját számoljuk az (x, y) pontban. Ehhez az $f(x, y)$ függvénybe behelyettesítjük a

$$\varphi(t) = x + t\cos\alpha, \qquad \psi(t) = y + t\sin\alpha$$

változókat, és a deriváltat nézzük a $t = 0$ helyen. A fenti tétel alapján:

$$F(t) = f(x + t\cos\alpha, y + t\sin\alpha)$$

deriváltja a $t = 0$ helyen: $F'(0) =$

$$= f'_x(x + 0\cos\alpha, y + 0\sin\alpha)\varphi'(0) + f'_y(x + 0\cos\alpha, y + 0\sin\alpha)\psi'(0) =$$

$$= f'_x(x, y)\cos\alpha + f'_y(x, y)\sin\alpha.$$

Ez a jól ismert formulát adja.

Láncszabály, 3. speciális eset

Adott $f(u, v)$ kétváltozós függvény, ahol az u és v változók helyére kétváltozós függvényeket helyettesítünk:

$$u = \phi(x, y), \qquad v = \Psi(x, y).$$

Legyenek $\psi, \phi : R \to \mathbb{R}$, $R \subset \mathbb{R}^2$ adott kétváltozós függvények. Jelölje:

$$S := \{(u, v) : u = \phi(x, y),\ v = \psi(x, y),\ (x, y)\epsilon R\}.$$

Ekkor az összetett függvény, melyet az

$$F(x, y) = f(\phi(x, y), \psi(x, y))$$

Bizonyítás. A definícióból közvetlenül látható.

Megjegyzés. Ugyanez a mérték definiálható n-dimenziós térben is, ekkor n dimenziós négyzetrácsos felosztást alkalmazunk.

2.1.2. Kettős integrál

Legyen $R \subset \mathbb{R}^2$ olyan mérhető halmaz, amely korlátos és zárt. Adott ezen egy $f : R \to \mathbb{R}^+$ folytonos függvény. Célunk, hogy meghatározzuk az $f(x,y)$ felület alatti térrész, azaz a következő három dimenziós tartomány térfogatát, $V(S)$-t:

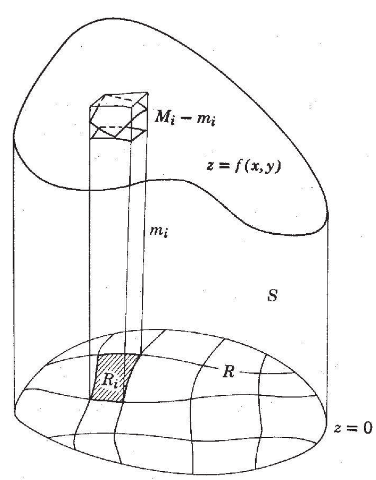
$$S = \{(x,y,z) : \ (x,y)\epsilon R, \ 0 \le z \le f(x,y)\},$$

Tekintsük az R halmaz felosztását olyan mérhető halmazokra, melyeknek nincs közös belső pontjuk: $R = R_1 \cup \ldots \cup R_n$. Jelölje

$$m_i = \inf\{f(x,y) : \ (x,y)\epsilon R_i\}, \qquad M_i = \sup\{f(x,y) : \ (x,y)\epsilon R_i\}.$$

Ekkor

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} A(R_i)m_i \le V(S) \le \sum_{i=1}^{n} A(R_i)M_i = S_n.$$



2.2. ábra. Az integrál közelítése

$y_i = y(t_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots n$. Ekkor a felület felszíne közelítve:

$$I \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \|(x_1, y_1) - (x_{i-1}, y_{i-1})\| \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot s(\widehat{P_{i-1}P_i}),$$

ahol a jobboldal utolsó tagjában a $\widehat{P_{i-1}P_i}$ ívdarab hossza szerepel. Ez alapján a vonalintegrál határátmenettel megkapható:

$$I = \int_\Gamma f(x, y)\ ds := \int\limits_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt.$$

Ez a definíció tetszőleges (nem csak pozitív értékű) integrálható függvényre alkalmazható.

2.5.1. Definíció. *Az f függvény vonalintegrálját a Γ görbe mentén így értelmezzük:*

$$\int_\Gamma f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Igazolható, hogy a fent definiált vonalintegrál értéke nem függ a görbe paraméterezésétől.

Példa. Speciális esetként legyen $f(x, y) \equiv 1$. Ekkor a vonalintegrál értéke

$$\int_\Gamma 1 ds = s(\Gamma),$$

a görbe ívhossza.

Megjegyzés. Az ilyen típusu vonalintegrálnak megfelelő fizikai mennyiség az energia.

2.5.2. Vektormező vonalintegrálja

2.5.2. Definíció. *(Térbeli Jordan görbe) Adott egy $[a, b] \subset \mathbb{R}$ véges intervallum, és adott ezen az intervallumon három valós függvény $x, y, z\ :\ [a, b] \to$*

Bizonyítás: Időtartományban látjuk be. (A frekvenciatartományban teljesen hasonlóan igazolható.)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f*g,s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(x)\cdot e^{-isx}dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\cdot g(x-y)dy\right)\cdot e^{-isx}dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\cdot e^{-isy}\int_{-\infty}^{\infty}g(x-y)\cdot e^{-is(x-y)}dx\,dy = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\cdot e^{-isy}\int_{-\infty}^{\infty}g(u)\cdot e^{-isu}du\,dy = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(u)\cdot e^{-isu}du\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\cdot e^{-isy}dy\cdot\sqrt{2\pi} = \\
&= \sqrt{2\pi}\cdot\mathcal{F}(g,s)\cdot\mathcal{F}(f,s)
\end{aligned}$$

3.7. Dirac-delta függvény

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és minden ε-ra definiáljuk az alábbi függvényt:

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x = 0, \\ \dfrac{1}{2\varepsilon}, & \text{ha} \quad 0 < |x| < \varepsilon, \\ 0, & \text{ha} \quad |x| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Ekkor minden ε-ra

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\varepsilon(x)dx = 1.$$

Kiszámoljuk, mi lesz a $\delta_\varepsilon(x)$ függvények Fourier transzformáltjának határértéke $\varepsilon \to 0$ esetén. Általában, tetszőleges f folytonos függvény mellett:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta_\varepsilon(x)dx = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}f(x)dx = \frac{1}{2\varepsilon}f(\xi)\cdot 2\varepsilon = f(\xi),$$

ahol $\xi\epsilon(-\varepsilon,\varepsilon)$ létezését az integrál-középérték tétel biztosítja. Ezért tehát

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta_\varepsilon(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}f(\xi) = f(0).$$

Következmény. A már megismert elemi függvények kiterjeszthetők komplex argumentumra. Például $f(z) = e^z$-re:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

5.2. Komplex függvények

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egy tartomány a komplex számsíkon. $f : D \to \mathbb{C}$ függvényt tekintünk. A független változót $z = x + iy$, a függő változót $w = u + iv$ jelöli. Tehát a hozzárendelés $w = f(z) = u + iv$.

1. *Példa.* Legyen $f(z) = z^2$. Ekkor

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy),$$

ezért a függő változók

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy.$$

A függvény mindenütt értelmezve van, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

2. *Példa.* Legyen $f(z) = \dfrac{1}{z}$. Ekkor

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy}\frac{x - iy}{x - iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

A függvény minden $z \neq 0$ esetén értelmezve van.

Geometriai leírás

A komplex függvények pontos ábrázolására négy dimenzióra lenne szükségünk - ez nem megy. Így megelégszünk azzal, hogy két komplex számsíkot rajzolunk: az egyiken az értelmezési tartományt, a másik az értékkészletet ábrázoljuk. Ennek segítségével azt tudjuk megadni, hogy egy-egy konkrét komplex számhoz mit rendel hozzá a leképezés, illetve bizonyos speciális alakzatokat - például kört vagy egyenest - hogyan transzformál.