Hatványsorok, Taylor sor, újra

2018. február 12.

Hatványsor

Legyen $P(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$

Kicsit általánosabban:

Definíció. A hatványsor:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \qquad c_n \epsilon \mathbb{R}.}$$

Az egyszerűség kedvéért egyelőre feltesszük, hogy $x_0 = 0$.

Konvergencia halmaz

Definíció. Adott egy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ hatványsor.

Ennek *konvergencia halmaza* (konvergencia tartománya):

$$\boxed{\mathcal{H} = \{x \epsilon \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n < \infty\}.}$$

Röviden: *"Ahol konvergens"*

Konvergencia sugár

Definíció. Tegyük fel, hogy $\exists\xi \neq 0$, melyre $\xi\epsilon\mathcal{H}$, és $\exists\eta\not\epsilon\mathcal{H}$

A hatványsor <u>konvergencia sugara</u>

$$\rho := \sup\{|x| : \ x\epsilon\mathcal{H}\}.$$

Definíció. Ha $\mathcal{H} = \{0\}$, akkor $\rho := 0$.

Definíció. Ha $\mathcal{H} = \mathbb{R}$, akkor $\rho := \infty$.

Konvergencia halmaz

Állítás. A konvergencia halmaz intervallum.

A következő három eset lehetséges:

1. $\mathcal{H} = \{0\}$.
2. $\mathcal{H} = \mathbb{R}$.
3. $\mathcal{H} = [(-\rho, \rho)]$.

Konvergencia halmaz

3. $\mathcal{H} = [(-\rho, \rho)]$.

Ez röviden azt jelenti, hogy ha 0 $< \rho < \infty$, akkor

a konvergencia halmaz <u>végpontjairól</u> nem tudunk semmit.

Tehát a következő esetek bármelyike lehetséges:

$$\mathcal{H} = [-\rho, \rho] \qquad \mathcal{H} = (-\rho, \rho]$$

$$\mathcal{H} = [-\rho, \rho) \qquad \mathcal{H} = (-\rho, \rho)$$

Általános eset. Hatványsor konvergencia halmaza.

A hatványsor: $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n,}$ $(c_n) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \epsilon \mathbb{R}$ rögzített szám.

A hatványsor *konvergencia halmaza* :

$$\mathcal{H} = \{x \epsilon \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n < \infty\}.$$

A hatványsor konvergencia sugara $\rho := \sup\{|x-x_0| : \; x \epsilon \mathcal{H}\}$.

A következő három eset lehetséges:

- $\mathcal{H} = \{x_0\}$
- $\mathcal{H} = \mathbb{R}$
- $\mathcal{H} = [(x_0-\rho, x_0+\rho)]$.

Konvergencia sugár.

Tegyük fel, hogy létezik az alábbi határérték (esetleg $+\infty$) :

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}, \qquad \gamma = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

Ekkor

- $\gamma = 0$ esetén $\rho = \infty$. A hatványsor mindenütt konvergens.
- $\gamma = \infty$ esetén $\rho = 0$. A hatványsor csak 0-ban konvergens.
- $0 < \gamma < \infty$ esetén a hatványsor konvergencia sugara:

$$\rho = \frac{1}{\gamma}$$

Példa, új kérdés.

Legyen $f(x) := \dfrac{1}{1-x^2}$. Feírható-e hatványsorként? Igen:

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

Tehát az együtthatók:

$$c_n = \begin{cases} 0 & n = 2k+1 \\ 1 & n = 2k \end{cases}$$

A konvergencia sugár "reciproka" $\gamma = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$.

Így $\rho = 1$. A konvergencia tartomány $(-1, 1)$.

Ezért f hatványsor előállítása ebben az intervallumban igaz.

Hatványsor előállítás

Ha $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ az $x_0 = 0$ valamely környezetében,

akkor

$$f^{(n)}(0) = c_n n!.$$

Ezért a hatványsor előállításban

$$\boxed{c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.}$$

Hatványsor előállítás

Általában, ha

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

az x_0 valamely környezetében, akkor

$f(x_0) = c_0$.

$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n (x - x_0)^{n-1}$, ezért $f'(x_0) = c_1 \cdot 1$

stb ... $f^{(n)}(x_0) = c_n n!$

A hatványsor együtthatói: $\boxed{c_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.}$

Függvény előállítása Taylor sorának segítségével

Adott egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény.

Tfh $x_0 \epsilon (a, b)$ pontban végtelen sokszor differenciálható.

Definíció.

Az f függvény x_0 pont körüli **Taylor sora** az alábbi függvény

$$T(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

$x_0 = 0$ esetén szokás a Taylor sor helyett *McLaurent sor*ról beszélni.

Taylor sor konvergenciája

Állítás.

Legyen $f : (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \to \mathbb{R}$ végtelen sokszor differenciálható függvény.

Tegyük fel, hogy az $f^{(k)}$ deriváltak egyenletesen korlátosak:

$$|f^{(k)}(x)| \leq K \qquad \forall x \epsilon (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \qquad \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

Ekkor $f(x) = T(x)$ teljesül $\forall x \epsilon (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ esetén.

Exponenciális függvény

Állítás.

Az $f(x) = e^x$ függvény Taylor sora:

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \epsilon \mathbb{R}.}$$

Bizonyítás. $f^{(n)}(x) = e^x$.

Ezért $x_0 = 0$ választással $f^{(n)}(0) = 1$, $\forall n$ mellett.

Logaritmus függvény

Állítás. Az $f(x) = \ln(x)$ függvény $x_0 = 1$ körüli hatványsora

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n.$$

Bizonyítás.

$$f'(x) = \frac{1}{x}\,,\ f''(x) = -\frac{1}{x^2}\,\ldots,\ \ f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{x^n}$$

Trigonometrikus függvények

Az $f(x) = \sin(x)$ függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sora:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \qquad x \epsilon \mathbb{R},$$

Az $f(x) = \cos(x)$ függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sora:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \qquad x \epsilon \mathbb{R}.$$