Függvénysorozatok és függvénysorok, 2. rész

2018. február 15.

Egyenletes konvergencia

Ismétlés.

Az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergál az f-hez,

ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N = N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy $\forall n \geq N$-re

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \epsilon D$$

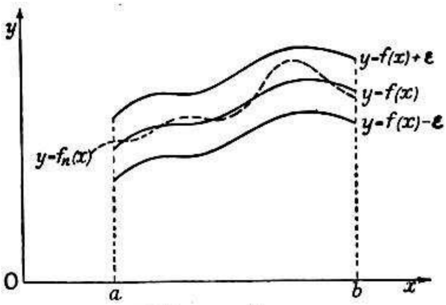

Fig. 4.—To illustrate uniform convergence

Az egyenletes konvergencia elégséges feltétele függvénysorra

Tétel. (ismétlés)

Adottak az $f_n : D \to \mathbb{R}$ függvények, közös ÉT.

Tfh. a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor tagjai korlátosak, éspedig f_n korlátja

$$|f_n(x)| < a_n, \qquad \forall x \epsilon D.$$

Tegyük fel továbbá, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

Ekkor $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ egyenletesen konvergens.

Példa

Legyen $f_n(x) = x^n$, $|x| < q < 1$, és q rögzített.

Tekintsük a $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ függvénysort.

Mivel $|f_n(x)| = |x^n| \leq q^n$, és $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ véges,

ezért $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ egyenletesen konvergens $(-q, q)$-ben.

Az összegfüggvény $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Példa

$$f(x) = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots$$

Az összegfüggvény $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0 \\ 1 + x^2, & \text{ha } x \neq 0 \end{cases}$

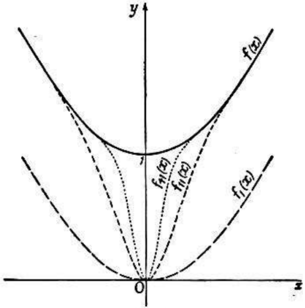

Fig. 7

Példa

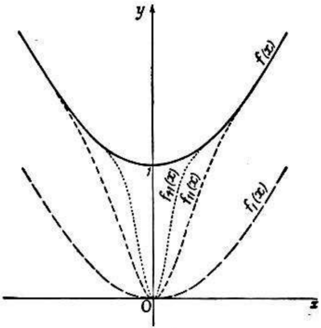

Fig. 7

A részletösszeg-függvények folytonosak, hiszen az összeadandók folytonosak.

Mégis, az összegfüggvénynek szakadása van.

Ennek oka abban rejlik, hogy *nem egyenletes a konvergencia.*

Az összegfüggvény tulajdonságai

Folytonosság

Tétel.

Tfh. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ egyenletesen konvergens D-ben.

Tegyük fel, hogy az $f_n : D \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak.

Ekkor $f : D \to \mathbb{R}$ is folytonos.

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ folytonossága, bizonyítás

Legyen $x_0 \epsilon D$ tetszőleges. Belátjuk, hogy itt f folytonos.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

Bontsuk fel a végtelen összeget két részre.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + R_n = F_n(x) + R_n(x)$$

ahol $F_n(x)$ az n-dik részletösszeg, $R_n(x)$ pedig a maradék.

Az egyenletes konvergencia miatt $\exists N = N(\varepsilon)$, melyre $\forall n > N$:

$$|f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)| = |R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \forall x \epsilon D.$$

Ezért $\quad |R_n(x) - R_n(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \epsilon D.$

Összegfüggvény folytonossága, bizonyítás

$$f(x) = F_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + R_n(x).$$

F_n véges sok folytonos függvény összege, ezért folytonos x_0-ban.

Tehát a fenti $\varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, hogy

$$|x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |F_n(x) - F_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Így ha $|x - x_0| < \delta$, akkor

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |F_n(x) - F_n(x_0)| + |R_n(x) - R_n(x_0)| < \varepsilon,$$

tehát f folytonos x_0-ban.

Integrálhatóság

Tétel.

Adottak az $f_n : D \to \mathbb{R}$ és $f : D \to \mathbb{R}$ függvények.

Tfh. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$, és a konvergencia egyenletes.

Legyen $[\alpha, \beta] \subset D$, és tegyük fel, hogy $f_n \epsilon \mathcal{R}[\alpha, \beta]$

Ekkor az összegfüggvény is integrálható $[\alpha, \beta]$-n, és

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f_n(x)dx.$$

Integrálhatóság

A tétel azt mondja ki, hogy az adott feltételek esetén

$$\int_\alpha^\beta \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\alpha^\beta f_n(x) dx.$$

A tételt nem bizonyítjuk.

Deriválhatóság

Tétel.

Tfh. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ egyenletesen konvergens D-ben.

Tfh. az $f_n : D \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak

Tfh. a deriváltakból álló függvénysor is egyenletesen konvergens, összege

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = g(x)$$

és $g(x)$ folytonos.

Ekkor $g(x) = f'(x)$.

Deriválhatóság

Fontos feltétel a differenciálhatóságnál, hogy

– a *deriváltakból álló függvénysor* is egyenletesen konvergens.

Ekkor az összeadás és deriválás felcserélhetők:

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

A tételt nem bizonyítjuk.

Hatványsor összegfüggvényének tulajdonságai

Ismétlés: Az összegfüggvény tulajdonságai

Tétel. Tegyük fel, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ egyenletesen.

– Ha $\forall f_n$ folytonos x_0-ban, akkor ott f is folytonos.

– Ha $\forall f_n$ integrálható $[\alpha, \beta] \subset D$-ben, akkor

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\alpha^\beta f_n(x)dx.$$

– Ha f_n diff-ható és $(\sum f_n')$ is egyenletesen konvergens, akkor

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

Hatványsor, Egyenletes konvergencia

Állítás. A $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ hatványsor konvergenciasugara $\rho\epsilon[0,\infty]$.

1. Ha $0 < r < \rho$, akkor a hatványsor egyenletesen konvergens $[-r, r]$-ben.

Bizonyítás. Mivel $r < \rho$, ezért $r\epsilon\mathcal{H}$.

Ha $x\epsilon[-r, r]$, akkor $|c_n x^n| \le |c_n| r^n$.

A majoráló számsor konvergens.

1.+ A hatványsor egyenletesen konvergens $[\alpha, \beta]$-ban, ha $[\alpha, \beta] \subset (-\rho, \rho)$.

Hatványsor, Folytonosság

2. A hatványsor összegfüggvénye

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

folytonos a konvergencia tartomány *belsejében*.

Bizonyítás. Ha $x_0 \epsilon \operatorname{int}\mathcal{H}$, akkor $\exists r < \rho$: $x_0 \epsilon [-r, r]$.

Itt a konvergencia egyenletes.

Hatványsor összegének deriváltja

3. A tagonkénti deriválással kapott függvénysort jelölje:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}.$$

 Ekkor F konvergencia sugara megegyezik az eredeti hatványsor konvergencia sugarával.

Bizonyítás. F konvergencia sugarának ”reciproka”:

$$\gamma_d = \lim_{n\to\infty} \frac{|(n+1)c_{n+1}|}{|nc_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \gamma . \surd$$

Hatványsor összegének deriváltja

4. A hatványsor a konvergencia halmazának minden belső pontjában tagonként deriválható és deriváltja

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}.$$

Bizonyítás. A sor is, és deriváltja is egyenletesen konvergens a belső pontokban.

4. + Sőt, a hatványsor k-dik deriváltja:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) c_n\, x^{n-k}.$$

Hatványsor összegének integrálja

5. Ha $[\alpha, \beta] \subset (-\rho, \rho)$, akkor $f \epsilon \mathcal{R}[\alpha, \beta]$, és

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \bigg|_{\alpha}^{\beta}.$$

Bizonyítás. Ha $[\alpha, \beta] \subset (-\rho, \rho)$, akkor $[\alpha, \beta] \subset [-r, r]$, valamely $r < \rho$ mellett.

Itt a konvergencia egyenletes.

Példa

Legyen $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

A konvergencia sugár ”reciproka” $\gamma = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$.

Így $\rho = 1$. A konvergencia tartomány $[-1, 1)$.

Tudjuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, ha $|x| < 1$.

Az n. tag primitív függvénye: $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

A sor primitív függvénye:

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + c.$$

Ezért $f(x) = \int \frac{1}{1-x} \, dx = -\ln(1-x) + c$, valamilyen c-re.

Mivel $f(0) = 0$ és $-\ln(1-0) = 0$, ezért $c = 0$.

A zárt alak: $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

A zárt alak: $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, ha $x \epsilon [-1, 1)$.

Speciálisan, $x = -1 \epsilon \mathcal{H}$, alkalmazzuk a fenti képletet:

$$-\ln(1-(-1)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \Rightarrow \quad -\ln(2) = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots .$$

A harmonikus sor összege:

$$\boxed{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots = \ln(2)}$$