Függvénysorozatok és függvénysorok

2018. február 12.

Függvénysorozat

Függvénysorozat = függvények sorozata

Definíció.

Adottak az $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots : D \to \mathbb{R}$ függvények,

melyek értelmezési tartománya közös.

Ezek sorozatát **függvénysorozat**nak nevezzük. Jele (f_n).

Példa. $f_n(x) = x^n, \ x \epsilon [0, 1]$.

Függvény sorozat határértéke

Definíció.

Az (f_n) függvénysorozat **határértéke** az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény, ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \forall x \epsilon D.$$

A fenti definícióban $\forall x \epsilon D$-ben az

$$(f_n(x)) \text{ számsorozat konvergens.}$$

Ez a konvergencia *pontonkénti konvergencia.*

Példa.

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = 1 \\ 0 & \text{ha } x \epsilon [0,1) \end{cases}.$$

1. Példa

Legyen $f_n(x) = \sin^n(x)$, a közös ÉT: $0 \leq x \leq \pi$.

A függvénysorozat határértéke

$$\lim_{n\to\infty} \sin^n(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = \pi/2 \\ 0 & \text{ha } x \neq \pi/2 \end{cases} .$$

Így

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = \pi/2 \\ 0 & \text{ha } x \neq \pi/2 \end{cases} .$$

Cauchy kritérium függvénysorozatra

Tétel. (Cauchy-kritérium)

Az (f_n) függvénysorozat pontosan akkor konvergens, ha

$\forall \varepsilon > 0$-hoz és $\forall x \epsilon D$-hez $\exists N = N(\varepsilon, x)$ küszöbindex,

melyre $\forall n, m \geq N$ esetén

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Egyenletes konvergencia

Definíció.

Az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergál az f-hez,

ha $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists N = N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy $\forall n \geq N$-re

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \epsilon D$$

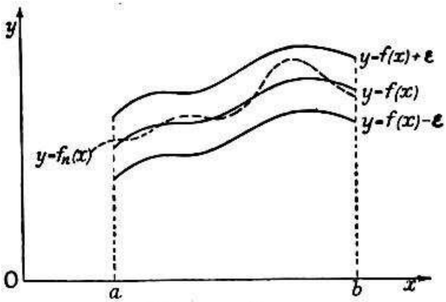


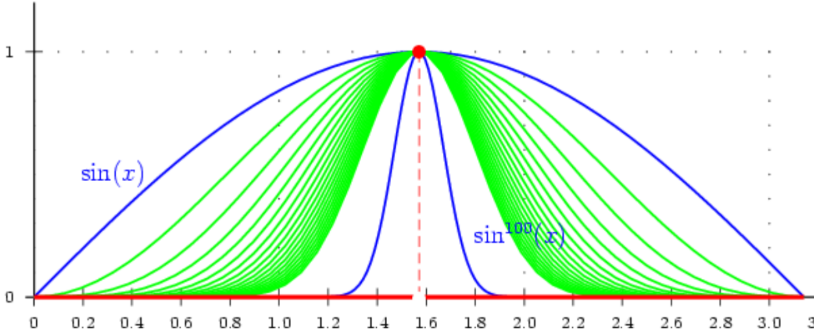
Fig. 4.—To illustrate uniform convergence

Itt az N küszöbindex csak ε-tól függ, $\forall x$ esetén jó!

1. Példa

Legyen $f_n(x) = \sin^n(x)$, $x \epsilon [0, \pi]$.

A függvénysorozat nem egyenletesen konvergens.



1. Példa. $f_n(x) = \sin^n(x)$

Legyen $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Belátjuk, hogy $\forall N$-hez $\exists x \epsilon [0, \pi)$, melyre $\sin^N(x) > \frac{1}{2}$

Valóban, $0 < \sqrt[N]{\frac{1}{2}} < 1$, így $\exists \eta \epsilon (0, 1)$: $\eta > \sqrt[N]{\frac{1}{2}}$.

Így ha $\sin(x) > \eta$, akkor $\sin^N(x) > \eta^N > \frac{1}{2}$.

Ezért N nem jó küszöbindex az $\varepsilon = \frac{1}{2}$-hez.

$\varepsilon = \frac{1}{2}$-hez NINCS KÜSZÖBINDEX.

Elégséges feltétel egyenletes konvergenciára

Tétel. Adottak $f_n,\ f : D \to \mathbb{R}$ függvények.

Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, pontonkénti határérték.

Tegyük fel, hogy a függvények korlátosak,és

$$|f_n(x) - f(x)| < a_n \qquad \forall x \epsilon D$$

Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ esetén a fenti konvergencia egyenletes.

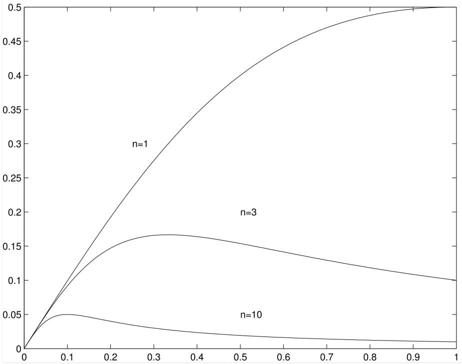
2. Példa

Legyen $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + x^2 n^2}, \qquad x \epsilon \mathbb{R}.$

Könnyen látható, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x}{1 + x^2 n^2} = 0, \qquad \forall x \epsilon \mathbb{R}.$$

A pontonkénti határérték
$f \equiv 0$.



$$f_n(x) = \frac{x}{1 + x^2 n^2}$$

Vajon egyenletes-e a konvergencia?

Mivel f_n páratlan, ezért elegendő az $x > 0$ esetet vizsgálni.

Ekkor

$$0 < \frac{x}{1 + x^2 n^2} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{2nx}{1 + x^2 n^2}.$$

A jobboldal második tényezőjére $\dfrac{2nx}{1 + x^2 n^2} \leq 1,$

hiszen $\quad 2nx \leq 1 + x^2 n^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq (1 - nx)^2 \; \surd$

Ezért $0 < \dfrac{x}{1 + x^2 n^2} \leq \dfrac{1}{2n} \quad \to 0.$

A fenti tétel miatt tehát egyenletes a konvergencia.

Függvénysor összege

Definíció.

Adottak az $f_n : D \to \mathbb{R}$ függvények, közös ÉT: D

Az $(\sum f_n)$ függvénysor összege $f : D \to \mathbb{R}$,

ha minden $x \epsilon D$-re

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x).$$

Jelölés : $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f.$

Függvénysor összege

Definíció. (átfogalmazva)

Az (f_n) függvénysor konvergens és az összegfüggvény f, ha

$\forall x \epsilon D$ esetén, $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N = N(\varepsilon, x)$ melyre

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon, \qquad \forall n > N$$

Cauchy-kritérium függvénysorokra

Tétel.

A fenti függvénysor pontosan akkor konvergens, ha

$\forall x \epsilon D$ esetén $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N = N(\varepsilon, x)$, melyre

$$\left| \sum_{k=m}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon. \qquad \forall n > m > N$$

Egyenletes konvergencia függvénysorokra

Definíció.

A függvénysor konvergenciája **egyenletes**,

ha a részletösszegek sorozata egyenletesen konvergens,

azaz

$$F_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

jelöléssel $F_n \to f$ egyenletesen.

Egyenletes konvergencia függvénysorokra

Példa. Tekintsük az alábbi végtelen sort

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots$$

A függvénysor n-dik tagja tehát

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}.$$

Meg akarjuk határozni a

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}$$

függvénysor összegét.

Példa

$$f(x) = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots$$

$x = 0$ esetén az összegfüggvény $f(0) = 0$.

Ha $x \neq 0$, akkor x^2-t kiemelve egy mértani sort kapunk, melynek hányadosa $\frac{1}{1+x^2} < 1$. Ezért a függvénysor összege

$$f(x) = x^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^2} + \dots\right) =$$

$$x^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{x^2}{\frac{1+x^2-1}{1+x^2}} = 1 + x^2.$$

Példa

Tehát az összegfüggvény

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0 \\ 1 + x^2, & \text{ha } x \neq 0 \end{cases}$$

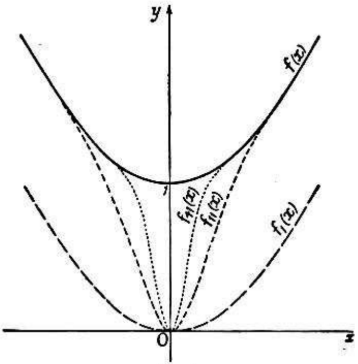


Fig. 7

Példa

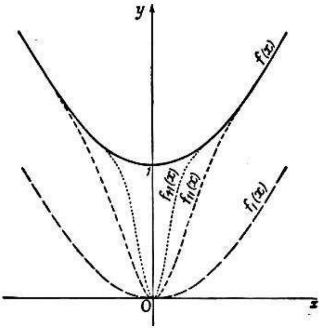


Fig. 7

Az öszegfüggvénynek 0-ban (megszüntethető) szakadása van.

A részletösszeg-függvények folytonosak, hiszen az összeadandók folytonosak.

Mégis, az összegfüggvénynek szakadása van.

Ennek oka abban rejlik, hogy *nem egyenletes a konvergencia.*

Az egyenletes konvergencia elégséges feltétele

Tétel.

Adottak az $f_n : D \to \mathbb{R}$ függvények, közös ÉT.

Tfh. a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor tagjai korlátosak, éspedig f_n korlátja

$$|f_n(x)| < a_n, \qquad \forall x \epsilon D.$$

Tegyük fel továbbá, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

Ekkor $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ egyenletesen konvergens.

Egyenletes konvergencia elégséges feltétele

Bizonyítás.

A számtani sor konvergens.

Ezért $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N = N(\varepsilon)$, melyre $\forall n > m > N$ esetén

$$\sum_{k=m}^{n} a_k < \varepsilon.$$

Ekkor

$$\left| \sum_{k=m}^{n} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=m}^{n} a_k < \varepsilon, \quad \forall x \epsilon D.$$

A küszöbindex x-től független.