Függvénysorok

kiegészítés

2018. február 26.

Függvénysor összegének integrálhatósága, ismétlés

Tétel.

Adottak $f_n : D \to \mathbb{R}$ és $f : D \to \mathbb{R}$.

Tfh. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ egyenletesen.

Legyen $[\alpha, \beta] \subset D$, és tegyük fel, hogy $\underline{f_n \epsilon \mathcal{R}[\alpha, \beta]}$

Ekkor az $f = \sum f_n$ összegfüggvény is $f \epsilon \mathcal{R}[\alpha, \beta]$ és

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\alpha^\beta f_n(x)dx.$$

$$\int_\alpha^\beta \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\alpha^\beta f_n(x)dx.$$

Példa

Legyen $[0,1] \cap \mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots, r_n \dots\}$ felsorolás.

Definiáljunk az $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvényeket:

$$f_n = \begin{cases} 1, & x = r_n \\ 0, & x \neq r_n \end{cases}, \qquad n = 1, 2, \dots.$$

Ekkor $f_n \epsilon \mathcal{R}[0,1]$. Az összegfüggvény:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \epsilon \mathbb{Q} \\ 0, & x \epsilon \mathbb{Q}^* \end{cases},$$

ami a Dirichlet függvény, $f \not\epsilon \mathcal{R}[0,1]$. Ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx.$$

Indoklás: $f(x) = \sum f_n(x)$ konvergencia nem egyenletes.