Függvényrendszerek 2. rész

2018. április 9.

Függvényrendszer. Ismétlés.

$R \subset \mathbb{R}^2$ tartomány, és $\Phi, \Psi : R \to \mathbb{R}$ két függvény.

$(x, y) \epsilon R$ esetén legyen

$$\begin{aligned} \xi &= \Phi(x, y) \\ \eta &= \Psi(x, y). \end{aligned}$$

Az $F : (x, y) \mapsto (\xi, \eta)$ leképezés FÜGGVÉNYRENDSZER.

$F = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix} : R \to \mathbb{R}^2$ az a függvény, melyre

$$F(x, y) = (\Phi(x, y), \Psi(x, y)) = (\xi, \eta).$$

Jacobi mátrix. Ismétlés.

Ha $F:(x,y)\mapsto(\xi,\eta)$ koordinátafüggvényei $\Phi,\Psi:R\to\mathbb{R}$ differenciálhatók, akkor az F vektormező DIFFERENCIÁLHATÓ, JACOBI MÁTRIXa:

$$\mathcal{J}(x,y):=\begin{pmatrix}\Phi'_x(x,y) & \Phi'_y(x,y)\\ \Psi'_x(x,y) & \Psi'_y(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\operatorname{grad}\Phi(x,y)\\ \operatorname{grad}\Psi(x,y)\end{pmatrix}.$$

A $\mathcal{J}(x,y)$ mátrix determinánsa a JACOBI DETERMINÁNS:

$$D(x,y):=\Phi'_x(x,y)\Psi'_y(x,y)-\Psi'_x(x,y)\Phi'_y(x,y).$$

A Jacobi determináns formális jelölése: $D(x,y)=\dfrac{d(\xi,\eta)}{d(x,y)}$.

Függvényrendszer invertálhatósága. Ismétlés.

Tfh $F : R \to \mathbb{R}^2$ differenciálható, és Jacobi mátrixa nem szinguláris az $(x_0, y_0) \epsilon \operatorname{int} R$ pontban.

Ekkor F az (x_0, y_0) egy környezetében invertálható. Az inverz rendszer ilyen alakú lesz:

$$F^{-1} : (\xi, \eta) \mapsto (x, y), \qquad \begin{array}{rcl} x & = & g(\xi, \eta) \\ y & = & h(\xi, \eta) \end{array} .$$

Ekkor az inverz rendszer függvényei is differenciálhatók.

$$F^{-1} : (\xi, \eta) \mapsto (x, y), \qquad \begin{array}{rcl} x & = & g(\xi, \eta) \\ y & = & h(\xi, \eta) \end{array}$$

Az inverz rendszer Jacobi mátrixa:

$$\mathcal{K}(\xi, \eta) := \begin{pmatrix} g'_\xi(\xi, \eta) & g'_\eta(\xi, \eta) \\ \\ h'_\xi(\xi, \eta) & h'_\eta(\xi, \eta) \end{pmatrix}.$$

Tétel. *Az inverz rendszer deriváltja így írható:*

$$\mathcal{K}(\xi, \eta) = (\mathcal{J}(x, y))^{-1}, \quad (x, y) \longleftrightarrow (\xi, \eta)$$

Speciálisan, a Jacobi determinánsokra:

$$\frac{d(\xi, \eta)}{d(x, y)} = 1 \Big/ \frac{d(x, y)}{d(\xi, \eta)}.$$

Analógia: Ha $f'(x_0) \neq 0$, akkor x_0 környezetében f invertálható:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \qquad y = f(x).$$

Most $F = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix} : R \to S$, inverze $F^{-1} = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} : S \to R$.

$F = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix}$ derivált-mátrixa:

$$\mathcal{J}(x,y) = \begin{pmatrix} \Phi'_x(x,y) & \Phi'_y(x,y) \\ & \\ \Psi'_x(x,y) & \Psi'_y(x,y) \end{pmatrix}.$$

$F^{-1} = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$ derivált-mátrixa:

$$\mathcal{K}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} g'_\xi(\xi, \eta) & g'_\eta(\xi, \eta) \\ \\ h'_\xi(\xi, \eta) & h'_\eta(\xi, \eta) \end{pmatrix}.$$

Összefüggés a Jacobi mátrixok között:

$$\mathcal{K}(\xi, \eta) = (\mathcal{J}(x, y))^{-1}, \qquad \text{ahol} \quad (\xi, \eta) = F(x, y).$$

Analógia: $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)},\ y = f(x).$

1. Példa. Lineáris koordináta-transzformáció.

A homogén lineáris leképezés

$$\begin{aligned} \xi &= ax + by \\ \eta &= cx + dy \end{aligned}, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

A Jacobi mátrix konstans:

$$J(x, y) = A \qquad \forall (x, y) \epsilon \mathbb{R}^2.$$

Ezért a Jacobi determináns:

$$D = \det(A) = ad - bc.$$

A leképezés invertálható, ha A nem szinguláris.

2. Példa

Tekintsük a polárkoordináták esetét. Ekkor a függvényrendszer:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\quad = \Phi(x, y) \;)$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} + c_0 \quad (\quad = \Psi(x, y). \;)$$

Ennek Jacobi mátrixa:

$$\mathcal{J}(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \\ \dfrac{-y}{x^2 + y^2} & \dfrac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

Ezért a Jacobi determináns:

$$D = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{r}. \quad r \neq 0!$$

Az inverz rendszer

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \quad (\quad = g(r,\theta)\ ) \\ y &= r\sin\theta \quad (\quad = h(r,\theta)\ ) \end{aligned}$$

Az inverz rendszer Jacobi mátrixa

$$\mathcal{K}(r,\theta) = \begin{pmatrix} g'_r(r,\theta) & g'_\theta(r,\theta) \\ \\ h'_r(r,\theta) & h'_\theta(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & r(-\sin\theta) \\ \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Ennek determinánsa

$$\det\ (\mathcal{K}) = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

$$\mathcal{J}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{J}} \begin{pmatrix} \dfrac{x}{x^2+y^2} & \dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \\ \dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$

Láttuk, hogy $\det \mathcal{J} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Ezért

$$\mathcal{J}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & -y \\ \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = \mathcal{K}.$$

Koordináta transzformáció három dimenzióban

Függvényrendszer $\mathbb{R}^3$-ban.

$R \subset \mathbb{R}^3$ tartomány, és $\Phi, \Psi, \Lambda : R \to \mathbb{R}$ három függvény.

$(x, y, z) \epsilon R$ esetén legyen

$$\begin{aligned} \xi &= \Phi(x, y, z) \\ \eta &= \Psi(x, y, z) \\ \theta &= \Lambda(x, y, z). \end{aligned}$$

$F : (x, y, z) \mapsto (\xi, \eta, \theta)$ 3-dimenziós FÜGGVÉNYRENDSZER.

$F = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \\ \Lambda \end{pmatrix} : R \to \mathbb{R}^3$ az a függvény, melyre

$$F(x, y, z) = \Big(\Phi(x, y, z), \Psi(x, y, z), \Lambda(x, y, z)\Big) = (\xi, \eta, \theta).$$

Jacobi mátrix

Ha $F:(x,y,z)\mapsto(\xi,\eta,\theta)$ koordinátafüggvényei $\Phi,\Psi,\Lambda : R\to\mathbb{R}$ differenciálhatók, akkor az F vektormező DIFFERENCIÁLHATÓ, JACOBI MÁTRIXa:

$$\mathcal{J}(x,y,z):=\begin{pmatrix}\Phi'_x(x,y,z) & \Phi'_y(x,y,z) & \Phi'_z(x,y,z)\\ \Psi'_x(x,y,z) & \Psi'_y(x,y,z) & \Psi'_z(x,y,z)\\ \Lambda'_x(x,y,z) & \Lambda'_y(x,y,z) & \Lambda'_z(x,y,z)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\operatorname{grad}\Phi(x,y,z)\\ \operatorname{grad}\Psi(x,y,z)\\ \operatorname{grad}\Lambda(x,y,z)\end{pmatrix}.$$

A JACOBI DETERMINÁNS: $D(x,y,z):=\det\mathcal{J}(x,y,z)$. A Jacobi determináns formális jelölése: $D(x,y,z)=\dfrac{d(\xi,\eta,\theta)}{d(x,y,z)}$.

Példa koordinátatranszformációra

A homogén lineáris leképezés

$$
\begin{aligned}
\xi &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\
\eta &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \quad , \\
\theta &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z
\end{aligned}
$$

A Jacobi mátrix konstans:

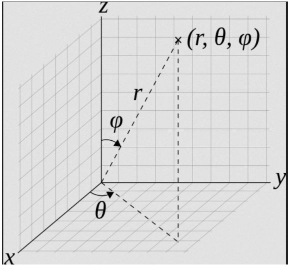
$$
J(x, y, z) = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \forall (x, y, z) \epsilon \mathbb{R}^3.
$$

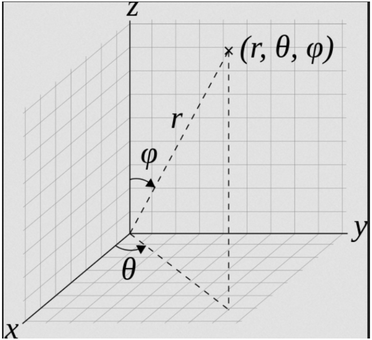
Gömbi polárkoordináták

Szférikus (=gömbi) koordináták $\mathbf{R}^3$-ban.

Egy $(x, y, z) \epsilon \mathbf{R}^3$ pont GÖMBI KOORDINÁTÁI (r, φ, θ):

- $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 0$, a pontba mutató vektor hossza.
- $\varphi \epsilon [0, \pi]$, a pontba mutató vektor és a z^+ tengely szöge.
- $\theta \epsilon [0, 2\pi)$, a pontba mutató vektor (x, y) sík-vetületének és az x^+ tengely szöge.





A gömbi koordinátákkal az (x, y, z) pont így írható le:

$$
\begin{aligned}
x &= r \sin\varphi \ \cos\theta \\
y &= r \sin\varphi \ \sin\theta \\
z &= r \cos\varphi .
\end{aligned}
$$

Gömbi polárkoordináták.

$$\begin{aligned} x &= r \sin\varphi \ \cos\theta \\ y &= r \sin\varphi \ \sin\theta \\ z &= r \cos\varphi. \end{aligned}$$

Határozzuk meg $(r, \varphi, \theta) \mapsto (x, y, z)$ Jacobi mátrixát:

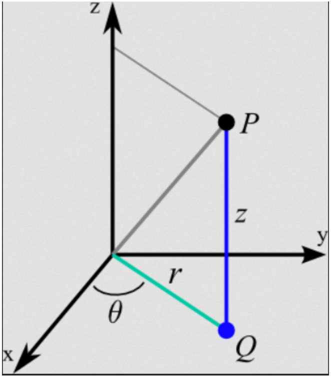
$$J(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \sin\varphi \cos\theta & r \cos\varphi \cos\theta & -r \sin\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \sin\theta & r \cos\varphi \sin\theta & r \sin\varphi \cos\theta \\ \cos\varphi & -r \sin\varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

A fenti mátrix determinánsa $\det J(r, \varphi, \theta) = r^2 \ \sin\varphi$.

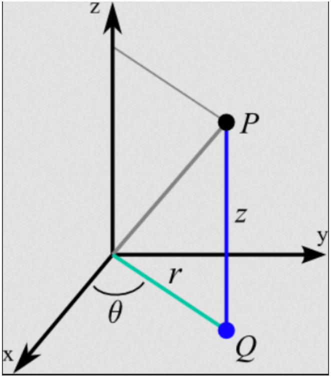
Hengerkoordináták.

Egy (x, y, z) pont HENGERKOORDINÁTÁI (r, θ, z), melyeket a következőképpen adunk meg:

- (r, θ) a pont (x, y) síkra vett vetületének polárkoordinátái,
- z a harmadik Descartes koordináta.



Hengerkoordináták.



$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta \\
y &= r\sin\theta \\
z &= z.
\end{aligned}
$$

Hengerkoordináták.

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z. \end{aligned}$$

A henger-koordináta transzformáció Jacobi mátrixa

$$J(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tehát a megfelelő Jacobi determináns

$$D(r,\theta,z) = r.$$