Függvényrendszerek.

2018. március 22.

Vektormező

"Egyszerre több függvényt tekintünk"

Definíció.

Adott $R \subset \mathbb{R}^2$ *tartomány, és két valós függvény,* $\Phi, \Psi : R \to \mathbb{R}$.

A FÜGGVÉNYRENDSZER*:*

$$\begin{aligned} \xi &= \Phi(x, y) \\ \eta &= \Psi(x, y). \end{aligned}$$

Az $F : R \to \mathbb{R}^2$ *leképezést, melyre*

$$F : (x, y) \mapsto (\xi, \eta) = F(x, y)$$

VEKTORMEZŐ*-nek nevezzük.*

1. Példa

A homogén lineáris leképezés:

$$\begin{aligned} \xi &= ax + by \\ \eta &= cx + dy. \end{aligned}$$

Ez $\mathbb{R}^2$-beli lineáris transzformáció. Tömören:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

2. Példa

Polárkoordináták és Descartes koordináták közötti kapcsolat:

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{rcl} x & = & r\cos(\theta) \\ y & = & r\sin(\theta) \end{array} .$$

Legyen $R = \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi)$. A vektormező $F : R \to \mathbb{R}^2$.

$$F(r, \theta) = (x, y).$$

Definíció.

Tfh $F : (x, y) \mapsto (\xi, \eta)$ *koordinátafüggvényei* $\Phi, \Psi : R \to \mathbb{R}^2$ *differenciálhatók.*

Ekkor az F vektormező DIFFERENCIÁLHATÓ*,* JACOBI MÁTRIX*a:*

$$\mathcal{J}(x, y) := \begin{pmatrix} \Phi'_x(x, y) & \Phi'_y(x, y) \\ \Psi'_x(x, y) & \Psi'_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} \Phi(x, y) \\ \operatorname{grad} \Psi(x, y) \end{pmatrix}.$$

A $\mathcal{J}(x, y)$ *mátrix determinánsa a* JACOBI DETERMINÁNS*:*

$$D(x, y) := \Phi'_x(x, y)\Psi'_y(x, y) - \Psi'_x(x, y)\Phi'_y(x, y).$$

A Jacobi determináns formális jelölése: $D(x, y) = \dfrac{d(\xi, \eta)}{d(x, y)}$.

Invertálhatóság

Az $F = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix} : R \to \mathbb{R}^2$ vektormező képtere:

$$B = \{(\xi, \eta) : \ \xi = \Phi(x, y), \eta = \Psi(x, y) : (x, y) \epsilon R\}.$$

Tegyük fel, hogy az $F : R \to B$ leképezés injektív.

Az inverz rendszer ilyen alakú lesz:

$$F^{-1} : B \to R, \qquad \begin{array}{rcl} x & = & g(\xi, \eta) \\ y & = & h(\xi, \eta) \end{array} .$$

Az inverz leképezés differenciálhatósága

Tegyük fel, hogy az inverz rendszer függvényei differenciálhatók.

$$\begin{aligned} x &= g(\xi,\eta) \\ y &= h(\xi,\eta) \end{aligned}$$

Az inverz rendszer Jacobi mátrixa:

$$\mathcal{K}(\xi,\eta) := \begin{pmatrix} g'_\xi(\xi,\eta) & g'_\eta(\xi,\eta) \\ \\ h'_\xi(\xi,\eta) & h'_\eta(\xi,\eta) \end{pmatrix}.$$

Függvényrendszerek

Tétel.

Tfh $F : R \to \mathbb{R}^2$ *differenciálható, és Jacobi mátrixa nem szinguláris az* $(x_0, y_0) \epsilon \mathrm{int}\, R$ *pontban.*

Ekkor F az (x_0, y_0) *egy környezetében invertálható.*

Az inverz rendszer deriváltja így írható:

$$\mathcal{K}(\xi, \eta) = (\mathcal{J}(x, y))^{-1}, \quad (x, y) \longleftrightarrow (\xi, \eta)$$

Speciálisan, a Jacobi determinánsokra:

$$\frac{d(\xi, \eta)}{d(x, y)} = 1 \Big/ \frac{d(x, y)}{d(\xi, \eta)}.$$