Fourier transzformáció

2020. ápilis

Összefoglalás. Fourier sorok alaptétele

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan 2π szerint periodikus függvény,

– mely $[-\pi, \pi]$-ben szakaszonként folytonosan differenciálható,

– max véges sok első fajú szakadási helye van,

– és az x_0 szakadási pontban $f(x_0) = \dfrac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$.

Ekkor f egy-egyértelműen megadható:

$\longrightarrow$ két valós számsorozattal, (a_n) és (b_n), melyekre $\sum a_n^2 < \infty$ és $\sum b_n^2 < \infty$.

$\longrightarrow$ (vagy) egy komplex számsorozattal, (α_n), melyre $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$.

A Fourier transzformáció bevezetése

Tfh $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kielégíti az alábbi feltételeket:

1. $\forall [a, b] \subset \mathbb{R}$ esetén $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ véges sok pontot kivéve folytonosan differenciálható.
2. az x_0 szakadási pontban $f(x_0) = \dfrac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$.
3. f abszolút integrálható:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

Definíció.

Ha f teljesíti az 1. 2. 3. feltételeket, akkor FOURIER TRANSZFORMÁLTJA *az alábbi* $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *függvény:*

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx.$$

Fourier transzformált másik jelölése

$$\mathcal{F}(f, s) = \widehat{f}(s).$$

$f(x)$: az *időtartomány*-ban adott,

$\widehat{f}(s)$ a *frekvenciatartomány*-ban adott.

A FT egy komplex függvény integrálja:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(sx)dx - \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(sx))dx.\end{aligned}$$

Belátjuk, hogy $\widehat{f}(s)$ - mint improprius integrál - jól definiált:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}dx\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-isx}|dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty.$$

Kicsit közelebbről megvizsgáljuk. $B > 0$-ra definiáljuk:

$$\widehat{f}_B(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-B}^{B} f(x)e^{-ixs}dx.$$

Ekkor $\widehat{f}(s) = \lim_{B\to\infty} \widehat{f}_B(s)$.

$$
\begin{aligned}
|\widehat{f}(s) - \widehat{f}_B(s)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>B} |f(x)|\,|e^{-ixs}| dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-B} |f(x)| dx + \int_B^{\infty} |f(x)| dx \right).
\end{aligned}
$$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty \quad \Longrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists B_0$, ha $B > B_0$, akkor

$$
\int_{-\infty}^{-B} |f(x)| dx + \int_B^{\infty} |f(x)| dx < \varepsilon,
$$

$$
\Longrightarrow \quad |\widehat{f}(s) - \widehat{f}_B(s)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon, \qquad \forall s \in \mathbb{R}.
$$

$\widehat{f}_B(s)$ egyenletesen konvergál $\widehat{f}(s)$-hez, $B \to \infty$ esetén.

Az alaptétel

Tétel.

Tfh $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ teljesíti az 1.-2.-3. feltételeket. Ekkor:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) e^{isx} ds.$$

Ez az inverz Fourier transzformáció.

Megjegyzés. Elégséges feltétel az egyenletes konvergenciához:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f'(x)| dx < \infty, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f''(x)| dx < \infty.$$

FT és inverz FT.

Tfh $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ teljesíti az *1.-2.-3.* feltételeket.

$$f(x) \qquad \longleftrightarrow \qquad \widehat{f}(s).$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \longleftrightarrow \qquad \widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}.$$

Fourier transzformáció – Inverz Fourier transzformáció:

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx, \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) e^{isx} ds.$$

Tétel. (Fourier sorok alaptétele, komplex alak. Ismétlés.)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus függvény, mely $[-\pi, \pi]$-ben teljesíti az 1.-2.-3. feltételeket.

Ekkor

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ikx}, \quad \text{ahol} \quad \alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Analógia:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) e^{isx} ds, \quad \widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx.$$

FT TULAJDONSÁGAI

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(sx)dx - i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(sx)dx\right).$$

Ha f páros, akkor FT valós értékű

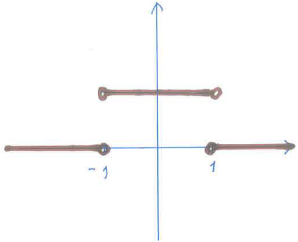
$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(sx)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\cos(sx)dx.$$

Ha f páratlan, akkor FT tisztán képzetes:

$$\widehat{f}(s) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(sx)dx = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\sin(sx)dx.$$

1. *Példa.* Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \le 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$



f páros, ezért

$$\widehat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \cos(sx)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\sin s}{s}.$$

2. *Példa.* Legyen $f(x) = e^{-|x|}$. Ez páros függvény. FT:

$$\widehat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-x} \cos(sx) dx = ?$$

A múlt félévben igazoltuk, hogy

$$\int e^{-x} \cos(bx) dx = e^{-x} \frac{-\cos(bx) + b \sin(bx)}{1 + b^2} + c$$

Ezért

$$\widehat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-x} \cos(sx) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + s^2}.$$

2. *Példa.* Legyen $f(x) = e^{-k|x|}$. Páros függvény. FT:

$$\widehat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-kx} \cos(sx) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k}{k^2 + s^2}.$$

A múlt félévben igazoltuk, hogy

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos(bx) dx = \left[e^{-ax} \frac{1}{a^2 + b^2} (-a \cos(bx) + b \sin(bx)) \right]_0^\infty =$$

$$= \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

A Fourier transzformált alaptulajdonságai

Állítás.

1. Linearitás:

   $\mathcal{F}(cf, s) = c\mathcal{F}(f, s), \mathcal{F}(f + g, s) = \mathcal{F}(f, s) + \mathcal{F}(g, s).$

   Bizonyítás. Az intergál lineáris operátor.

2. Ha f folytonos, akkor $\mathcal{F}(f)$ is folytonos.

   Bizonyítás. A FT *folytonos* függvények *egyenletes* határérté.

3. (Átskálázás) $\mathcal{F}(f(ax), s) = \frac{1}{a}\mathcal{F}(f(x), \frac{s}{a})$, ha $a > 0$.

   $$\mathcal{F}(f(ax), s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-isx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\frac{s}{a}y}\frac{1}{a}dy.$$

4. (Idő megfordítása) $\mathcal{F}(f(-x), s) = \mathcal{F}(f(x), -s)$.

$$\mathcal{F}(f(-x), s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x) e^{-isx} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} f(y) e^{isy} (-dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i(-s)y} dy.$$

5. (Idő eltolás) $\mathcal{F}(f(x - x_0), s) = e^{-ix_0 s} \mathcal{F}(f(x), s)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(x - x_0), s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0) e^{-isx} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-is(y + x_0)} dy. \end{aligned}$$

A Fourier transzformált alaptulajdonságai, folytatás

6. (Frekvencia eltolás)

$$\mathcal{F}(e^{ikx}f(x), s) = \mathcal{F}(f(x), s-k).$$

$$\mathcal{F}(e^{ikx}f(x), s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}f(x)e^{-isx}dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(s-k)x}dx.$$

A Fourier transzformált alaptulajdonságai, összefoglalás

Állítás.

1. Linearitás:

   $\mathcal{F}(cf, s) = c\mathcal{F}(f, s)$, $\mathcal{F}(f + g, s) = \mathcal{F}(f, s) + \mathcal{F}(g, s)$.

2. Ha f folytonos, akkor $\mathcal{F}(f)$ is folytonos.
3. (Átskálázás) $\mathcal{F}(f(ax), s) = \frac{1}{a}\mathcal{F}(f(x), \frac{s}{a})$, ha $a > 0$.
4. (Idő megfordítása) $\mathcal{F}(f(-x), s) = \mathcal{F}(f(x), -s)$.
5. (Idő eltolás) $\mathcal{F}(f(x - x_0), s) = e^{-ix_0 s}\mathcal{F}(f(x), s)$.
6. (Frekvencia eltolás) $\mathcal{F}(e^{ikx} f(x), s) = \mathcal{F}(f(x), s - k)$.