Fourier sorok komplex alakja.

2018. április 26.

Euler formula, ismétlés

Euler formula: szerint minden $x \epsilon \mathbb{R}$-re:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

x helyett $-x$: $\quad \Longrightarrow \quad e^{i(-x)} = \cos(x) - i \sin(x).$

Összeadva és kivonva a két egyenletet

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x, \qquad e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x.$$

Ezért a trigonometrikus függvények komplex alakja:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Fourier polinom komplex alakja

Az n-dik Fourier polinom (ism.):

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx).$$

Behelyettesítve:

$$\cos(kx) = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \qquad \sin(kx) = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}.$$

Így azt kapjuk, hogy

$$s_n(x) = \ \ldots \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ikx}, \qquad \alpha_k = \overline{\alpha_{-k}}.$$

Tétel.

Tfh $f(x) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ikx}$. *Ekkor az együtthatók:*

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Bizonyítás. Szorozzuk meg $f(x)$-et e^{-imx}-el, és integráljunk:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-m)x} dx = = \alpha_m \cdot 2\pi,$$

u.i. $e^{imx} = \cos(mx) + i \sin(mx)$.

Fourier sor, komplex alak

Definíció.

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény 2π szerint periodikus, integrálható $[-\pi, \pi]$-ben.

Az f függvény KOMPLEX FOURIER SORA*:*

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ikx}, \quad \text{ahol} \quad \alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Tétel. (Fourier sorok alaptétele, komplex alak)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π *szerint periodikus függvény, mely* $[-\pi, \pi]$*-ben*

– szakaszonként folytonosan differenciálható,

– max véges sok első fajú szakadási hellyel,

– az x_0 *szakadási pontban* $f(x_0) = \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Ekkor

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ikx}, \quad \text{ahol} \quad \alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Tétel. (Parseval egyenlőség, komplex alak)

A Fourier együtthatókra: $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$