Fourier sorok.

2. rész.

2018. február 22.

Fourier sor, ismétlés

f 2π szerint periodikus függvény, mely integrálható $[-\pi, \pi]$-ben.

Az f függvény *Fourier sora*:

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

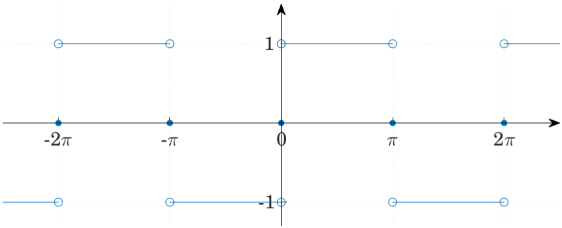
ahol a Fourier együtthatók:

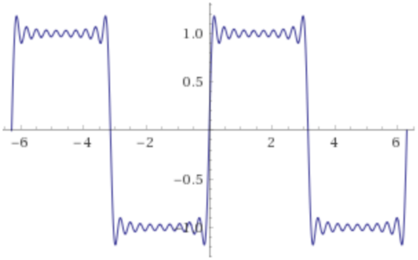
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Az **n**-*dik Fourier polinom*:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Előjel függvény és Fourier polinomja $n = 10$ taggal.





Fourier sor konvergenciája

A függvény és Fourier sora

Milyen feltételek mellett teljesül, hogy az f függvény előáll Fourier sora összegeként?

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Egyenletesen konvergens Fourier sor esetén ez igaz.

Ennél jóval kevesebb is elég lesz, erről szól a következő tétel.

Fourier sorok alaptétele

Tétel.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus függvény, mely $[-\pi, \pi]$-ben – szakaszonként folytonosan differenciálható,

– max véges sok első fajú szakadási helye van,

– az x_0 szakadási pontban: $f(x_0) = \dfrac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$.

Ekkor

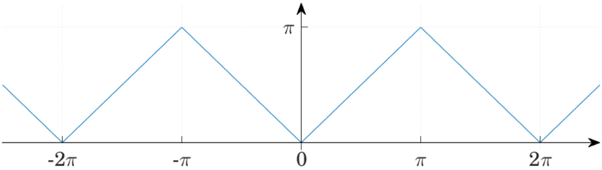
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

A Tételt nem bizonyítjuk.

Alkalmazás. $f(x) = |x|$ Fourier sora

Példa. Legyen $f(x) = |x|$, ha $x \epsilon [-\pi, \pi]$, egyébként 2π szerint periodikus.



$$f \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots\right).$$

(Ezt már láttuk.)

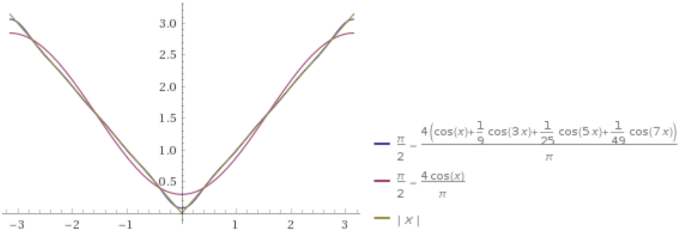
$f(x) = |x|$ Fourier sora

f eleget tesz a Fourier sorok alaptétele feltételeinek:

$[-\pi, \pi]$-ben – szakaszonként folytonosan differenciálható,

– max véges sok első fajú szakadási helye van, (nincs...).

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots\right), \quad \forall x \epsilon [-\pi,\ \pi].$$



$f(x) = |x|$ Fourier sora

Tehát $\forall x \epsilon [-\pi,\ \pi]$

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots\right).$$

Speciálisan, legyen $x = 0$.

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots),$$

azaz átrendezve

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Fourier sor konvergencia-sebessége

Fourier sorok alaptétele (ismétles)

Tétel.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus függvény, mely $[-\pi, \pi]$-ben

– szakaszonként folytonosan differenciálható,

– max véges sok első fajú szakadási helye van,

– az x_0 szakadási pontban: $f(x_0) = \dfrac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$.

Ekkor

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Fourier együtthatók nagyságrendje

Tegyük fel, hogy $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható véges sok pont kivételével. Ekkor:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Megvizsgáljuk, hogy mit mondhatunk a fenti végtelen sor konvergeciájának sebességéről.

Legyen $n \epsilon \mathbb{N}$ tetszőleges. Induljunk ki az alábbi egyenlőtlenségből:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))\right)^2 dx \geq 0.$$

Végezzük el a baloldalon a négyzetreemelést:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-\frac{a_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))\right)^2 dx =$$

$$\begin{aligned}
= \quad & \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx+\frac{a_0^2}{4}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx + \\
+ \quad & \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(kx)dx+b_k^2\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(kx)dx\right) - \\
- \quad & 2\frac{a_0}{2}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx-2\sum_{k=1}^{n}a_k\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx - \\
- \quad & 2\sum_{k=1}^{n}b_k\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx+0=
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx+\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)-a_0a_0-2\sum_{k=1}^{n}\left(a_ka_k+b_kb_k\right).$$

Együtthatók nagyságrendje, folytatás

A ”hosszú” számolással beláttuk, hogy

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-\frac{a_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))\right)^2 dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx-\frac{a_0^2}{2}-\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2).$$

Végső eredmény:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx-\frac{a_0^2}{2}-\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\geq 0.$$

$$0 \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2).$$

Ezzel beláttuk az ún *Bessel egyenlőtlenség*et:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \qquad \forall n \epsilon \mathbb{N}$$

Következmény. A Bessel egyenlőtlenség $n \to \infty$ esetén is igaz:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

Ennél több is igazolható:

Parseval egyenlőség

Tétel.

A Fourier együtthatókra teljesül az alábbi egyenlőség:

$$\boxed{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.}$$

"Energia megmaradás" jellegű állítás.

Egyenletes konvergencia

Általában nem igaz a Fourier sorok egyenletes konvergenciája.

De van egyenletesen konvergens trigonometrikus sor:

Tétel. (Fejér tétele)

Tfh $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *folytonos és* 2π *szerint periodikus.*

Jelölje s_n *az* f *függvény n-edik Fourier polinomját.*

Képezzük ezek számtani átlagát:

$$T_n(x) := \frac{s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_n(x)}{n+1}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \quad x \epsilon \mathbb{R}.$$

Ekkor egyenletes konvergenciával:

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = f(x).$$