Fourier sorok.

1. rész.

2018. február 19.

Függvénysor, ismétlés

Taylor sor: *Speciális függvénysor*, melynek tagjai:

$$cf_n(x) = cx^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Állítás. ”Bizonyos feltételekkel minden f előállítható”:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Hasonló állítást adunk, ha a függvénysor tagjai

$$a\cos(mx), \qquad b\sin(nx), \qquad n, m = 0, 1, 2, \ldots$$

Trigonometrikus polinomok

Definíció.

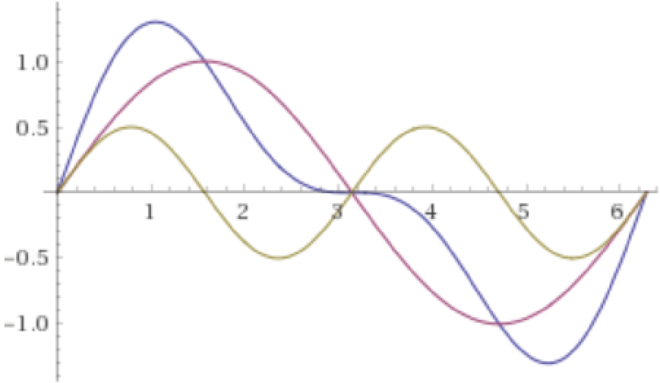
*Az f függvény n-ed fokú **trigonometrikus polinom**, ha előáll*

az alábbi alakban:

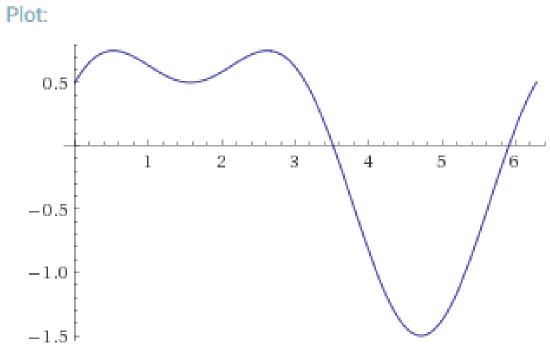
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right), \qquad x \in \mathbb{R}$$

valamely a_k, b_k valós együtthatókkal.

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin(2x)$$



Trigonometrikus polinom, példa



$$f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

Trigonometrikus sor

Definíció.

Trigonometrikus sor*nak az alábbi végtelen sort nevezzük:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right), \qquad x \epsilon \mathbb{R},$$

ahol (a_k), (b_k) *valós együtthatók.*

Trigonometrikus sor összege

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right).$$

Milyen függvény állítható elő trigonometrikus sor segítségével?

A végtelen összeg minden tagja

2π szerint periodikus és folytonos.

$\Longrightarrow$ az összegfüggvény 2π szerint periodikus lesz.

$\not\Longrightarrow$ az összegfüggvény folytonos.

A trigonometrikus függvényrendszer

Definiáljuk az alábbi alapfüggvényeket:

$$\phi_0(x) = 1,$$

$$\phi_1(x) = \sin(x), \qquad \phi_2(x) = \cos(x),$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$\phi_{2k-1}(x) = \sin(kx), \qquad \phi_{2k}(x) = \cos(kx),$$

$$\vdots$$

A trigonometrikus függvényrendszer

Lemma (ortogonalitás)

Tetszőleges $n \neq m$ mellett

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(x)\phi_m(x)dx = 0.$$

Háttér: Adott a $\mathcal{C}([-\pi,\pi]) := \{f : [-\pi,\ \pi] \to \mathbb{R} \text{ folytonos}\}$ függvénytér.

Ebben a vektortérben a skalárszorzat:

$$\langle f, g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(x)\phi_m(x)dx = 0$, $n \neq m$.

Bizonyítás. Ha $n = 0$, vagy $m = 0$, akkor

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_j(x)dx = 0, \qquad j > 0.$$

Egyébként trigonometrikus azonosságokat használunk:

$$\begin{aligned}
\cos(nx)\cos(mx) &= \frac{\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)}{2}, \\
\cos(nx)\sin(mx) &= \frac{\sin((n+m)x) + \sin((m-n)x)}{2}, \\
\sin(nx)\sin(mx) &= \frac{\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)}{2}.
\end{aligned}$$

A trigonometrikus függvényrendszer

Az alapfüggvények ”hossza”:

Lemma

Tetszőleges n mellett

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n^2(x)dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{ha } n = 0, \\ \pi, & \text{ha } n \neq 0. \end{cases}$$

$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n^2(x)dx =$

Bizonyítás. $n = 0$ esetén az azonosan 1 függvényt integráljuk.

$n \geq 1$ esetén egyrészt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)dx,$$

másrészt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos^2(nx) + \sin^2(nx)\right) dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1dx = 2\pi.$$

Ezért

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)dx = \pi.$$

A trigonometrikus függvények összege

Tétel.

Tegyük fel, hogy

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \qquad x \epsilon [-\pi, \pi].$$

egyenletes konvergenciával. Ekkor

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, \qquad k = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

A trigonometrikus függvények összege, bizonyítás

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \qquad x \epsilon [-\pi, \pi].$$

Szorozzuk meg az egyenletet $\cos(mx)$-el, majd integráljunk:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} \cos(mx) + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right\} \cos(mx) \right) dx$$

$$= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(mx) dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(mx) dx = a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx) dx = a_m \pi.$$

A trigonometrikus függvények összege, bizonyítás

Tehát:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx = \ldots a_m\pi.$$

Az integrálás és a végtelen összegzés sorrendjét felcseréltük!

Hasonlóan igazolhatóak az a_0-ra, illetve b_k, $k \geq 1$-re vonatkozó képletek.

Megjegyzés. Az *egyenletes konvergencia* nagyon erős feltétel.

Fourier sorok

A trigonometrikus függvények összege. Újra

Tétel.

Tegyük fel, hogy

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \qquad x \epsilon [-\pi, \pi].$$

egyenletesen konvergenciával. Ekkor

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, \qquad k = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Fourier együtthatók

Definíció.

Legyen f 2π szerint periodikus függvény, mely integrálható $[-\pi,\pi]$-ben. Az f függvény ***Fourier együtthatói****:*

$$
\begin{aligned}
a_k &:= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \\
b_k &:= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx, \qquad k = 1, 2, \ldots.
\end{aligned}
$$

Fourier sor

Definíció.

Legyen f 2π *szerint periodikus függvény, mely integrálható* $[-\pi, \pi]$*-ben. Az* f *függvény* ***Fourier sorát*** *(formálisan) így értelmezzük:*

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

ahol

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

a fent definiált Fourier együtthatók.

Megjegyzés. f értékei véges sok pontban módosítható.

Fourier polinom

Definíció.

A Fourier sor közelítése az ***n-dik Fourier polinom****:*

$$s_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Fourier sor, példa

1. *Példa.* Tegyük fel, hogy f páros függvény. Ekkor f Fourier sorában

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = 0,$$

így

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx).$$

Továbbá a párosság miatt

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx.$$

Fourier sor, példa

2. *Példa.* Hasonlóképp, ha f páratlan, akkor Fourier sorában $\forall a_k = 0$, ezért:

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx),$$

ahol

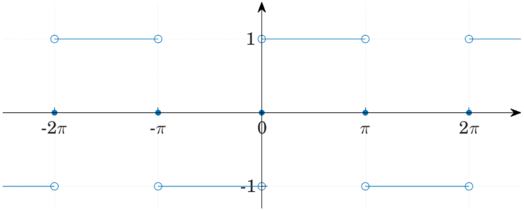
$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Előjel függvény

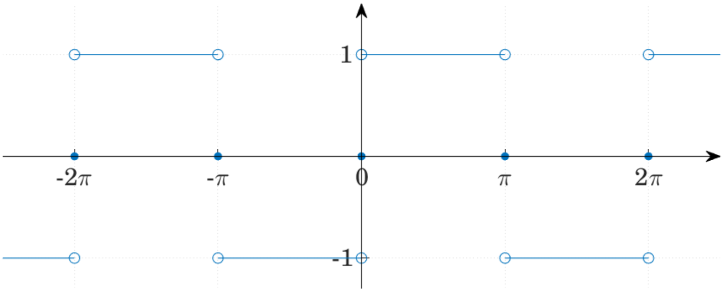
3. *Példa.* Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0,\ \pi,\ -\pi, \\ -1, & \text{ha} \quad -\pi < x < 0, \end{cases}$$

és $f(x) = f(x + 2\pi)$ egyébként.



Előjel függvény Fourier együtthatói



f páratlan függvény. $a_k = 0$.

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = \ = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(kx)dx = \frac{2}{k\pi}(1-(-1)^k).$$

Előjel függvény Fourier sora

$$b_k = \frac{2}{k\pi}(1 - (-1)^k).$$

Ezért

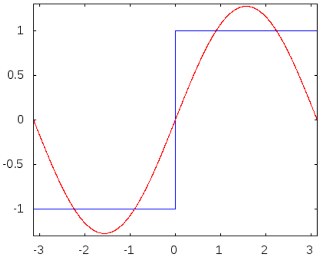
$$b_{2k} = 0, \qquad b_{2k-1} = \frac{4}{\pi}\,\frac{1}{2k-1}.$$

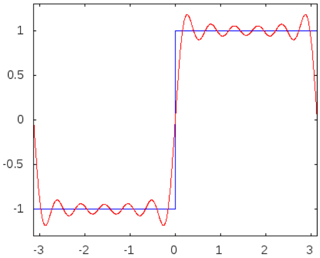
Így f Fourier sora:

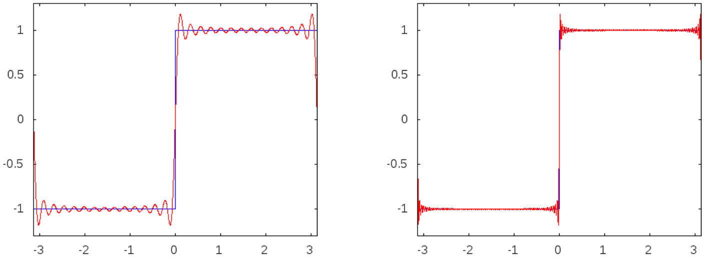
$$f \sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}.$$

Előjel függvény Fourier polinomjai

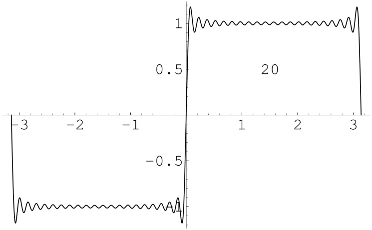
Bemutatjuk az első néhány Fourier polinomot.

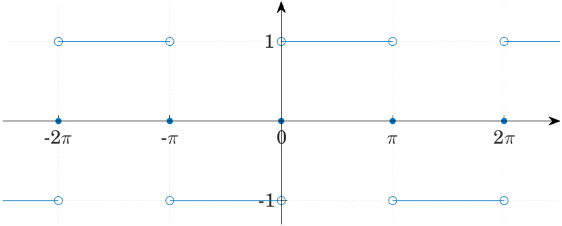





1
0.5
0
-0.5
-1
-3
-2
-1
0
1
2
3

Előjel függvény Fourier polinomja $n = 20$ taggal.





Deriváltfüggvény Fourier sora

Tétel.

Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény 2π szerint periodikus, és differenciálható.

Ekkor az f' függvény Fourier sora:

$$f' \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-a_k k \sin(kx) + b_k k \cos(kx)).$$

Tehát f' Fourier sora tagonkénti deriválással számítható.

Deriváltfüggvény Fourier sora

Bizonyítás. f' Fourier együtthatóit jelölje α_k és β_k.

Ekkor f' Fourier sora:

$$f' \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)),$$

ahol a definíciót felhasználva:

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(kx) dx, \qquad \beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin(kx) dx.$$

f' Fourier együtthatói

Parciálisan integrálunk.

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(kx)dx = \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[f(x)\cos(kx)\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = 0 + kb_k. \end{aligned}$$

$\beta_k = -ka_k$-ra a számolás hasonló. Összefoglalva

$$f' \sim \sum_{k=1}^{\infty}(b_k k\cos(kx) - a_k k\sin(kx)).$$

Deriváltfüggvény Fourier sora, általános eset.

Tétel.

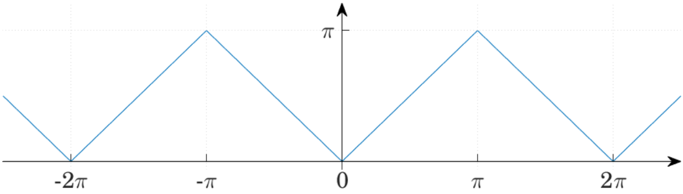
Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény 2π szerint periodikus, Tfh. a $[-\pi, \pi]$ intervallumon a függvény véges sok pont kivételével folytonos, és a szakadási pontok elsőfajú szakadások.

Tfh. véges sok pont kivételével differenciálható. Ekkor az f' függvény Fourier sora:

$$f' \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-a_k k \sin(kx) + b_k k \cos(kx)).$$

$g(x) = |x|$ Fourier sora

Példa. Legyen $g(x) = |x|$, ha $x \epsilon [-\pi, \pi]$, egyébként 2π szerint periodikus.



Mivel g páros, ezért $b_k = 0$.

$g(x) = |x|$ Fourier sora

$b_k = 0$ minden k-ra. A többi együttható:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^\pi = \pi.$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \left[x \frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^\pi - \frac{2}{\pi} \frac{1}{k} \int_0^\pi \sin(kx) dx =$$

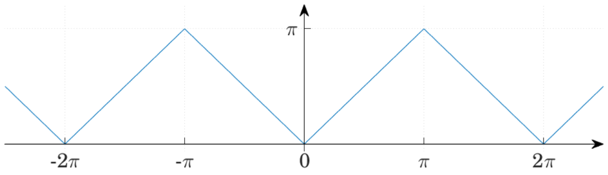
$$= -\frac{2}{\pi k} \left[\frac{-\cos(kx)}{k} \right]_0^\pi = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad k = 2n > 0, \\ -\frac{4}{\pi k^2} & \text{ha} \quad k = 2n+1. \end{cases}$$

$g(x) = |x|$ Fourier sora

$$a_0 = \pi, \qquad a_k = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad k = 2n > 0, \\ -\dfrac{4}{\pi k^2} & \text{ha} \quad k = 2n+1. \end{cases}.$$

Így g Fourier sora:

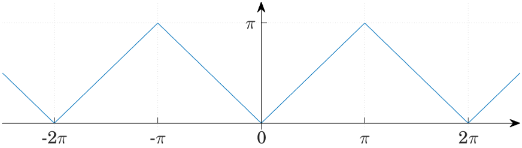
$$g \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots\right).$$

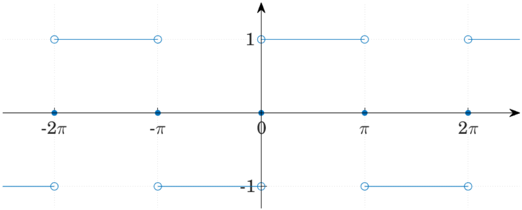


$f(x) = \text{sgn}(x)$ és $g(x) = |x|$

Hasonlítsuk össze:

$f(x) = \text{sgn}(x)$, és $g(x) = |x|$, ha $x \epsilon [-\pi, \pi]$,egyébként 2π szerint periodikusak.





$f(x) = \text{sgn}(x)$ és $g(x) = |x|$ Fourier sora

$f(x) = \text{sgn}(x)$, és $g(x) = |x|$, ha $x \epsilon [-\pi, \pi]$, egyébként 2π szerint periodikusak.

A Fourier sorok:

$$f \sim \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \ldots + \frac{\sin(2k-1)}{2k-1} + \ldots\right).$$

$$g \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \ldots\right).$$