Kétváltozós függvények differenciálszámítás

2020. március

Láncszabály 2-dim-ban. 1. eset. *Ismétlés*

A *külső függvény* $f(u)$. A *belső függvény* $u = \phi(x, y)$,

$\Longrightarrow$ Az összetett függvény $F(x, y) := f(\phi(x, y))$.

Tétel.

- *Ha* $\phi : S \to \mathbb{R}$ *differenciálható az* $(x, y) \in \operatorname{int} S$ *pontban,*
- *és ha* $f : D \to \mathbb{R}$ *differenciálható* $u = \phi(x, y)$*-ban,*

akkor $F = f \circ \phi : S \to \mathbb{R}$ *differenciálható* (x, y)*-ban, és*

$$F'_x(x, y) = f'(\phi(x, y))\,\phi'_x(x, y), \quad F'_y(x, y) = f'(\phi(x, y))\,\phi'_y(x, y).$$

Láncszabály 2-dim-ban. 2. eset.

Külső függvény $f(x, y)$. *Két belső függvény* $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Az összetett függvény: $F(t) := f(\varphi(t), \psi(t))$. $F : "\mathbb{R} \to \mathbb{R}"$.

Tétel.

- *Ha* $\varphi, \psi : D \to \mathbb{R}$ *differenciálhatóak a* $t \in \operatorname{int} D$*-ban,*
- *ha* $f : S \to \mathbb{R}$ *diff-ható* $(x, y) = (\varphi(t), \psi(t))$*-ben, és* $R_\varphi \times R_\psi \subset S$*,*

akkor az összetett függvény $F : D \to \mathbb{R}$ *differenciálható* t*-ben:*

$$F'(t) = f'_x(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f'_y(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t).$$

Példa . Az f függvény α irány menti deriváltja (x_0, y_0)-ban

$$D_\alpha f(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{t},$$

Legyenek

$$\varphi(t) := x_0 + t\cos\alpha, \quad \psi(t) := y_0 + t\sin\alpha,$$

$$F(t) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha) = f(\varphi(t), \psi(t)).$$

$$\Longrightarrow \quad D_\alpha f(x_0, y_0) = F'(0).$$

A láncszabály szerint

$$F'(t) = f'_x(\varphi(t), \psi(t))\cos\alpha + f'_y(\varphi(t), \psi(t))\sin\alpha.$$

Így $\quad F'(0) = f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\sin\alpha = \langle \mathrm{grad}\, f, (\cos, \sin)\rangle.$

Összetett függvény

Adott $f(u, v)$ kétváltozós függvény, ahol helyettesítünk:

$$u = \phi(x, y), \qquad v = \Psi(x, y).$$

$\psi, \phi : R \to \mathbb{R}$, $R \subset \mathbb{R}^2$ adott kétváltozós függvények. Tfh.

$$S := \{(u, v) : u = \phi(x, y),\ v = \psi(x, y),\ (x, y) \in R\} \subset D_f.$$

Az összetett függvény $F(x, y) = f(\phi(x, y), \psi(x, y))$,

$$F : R \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(\phi(x, y), \psi(x, y)).$$

Összetett függvény

Példa. $F(x,y) = e^{xy} sin(x+y)$, mint összetett függvény:

$$u = \phi(x,y) = xy, \quad v = \psi(x,y) = x + y,$$

$$f(u,v) = e^{u}\sin(v), \quad \Longrightarrow \quad F(x,y) = f(u,v).$$

Állítás.

- Tfh a ϕ, ψ folytonosak (x,y)-ban.
- Tfh f folytonos $(u,v) = (\phi(x,y), \psi(x,y))$-ban.

Akkor F is folytonos (x,y)-ban.

Láncszabály 2-dim-ban. 3. eset.

Az összetett függvény $F(x,y) = f(\phi(x,y), \psi(x,y))$.

Tétel.

- *Ha ϕ, ψ differenciálhatók (x,y)-ban és*
- *ha f differenciálható $(u,v) = (\phi(x,y), \psi(x,y))$-ban,*

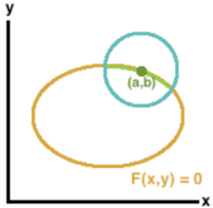
akkor $F = f(\phi, \psi)$ is differenciálható (x,y)-ban:

$$F'_x(x,y) = {f_u}'\,(\phi(x,y), \psi(x,y))\,\phi'_x(x,y) + f'_v\,(\phi(x,y), \psi(x,y))\,\psi'_x(x,y),$$

$$F'_y(x,y) = f'_u\,(\phi(x,y), \psi(x,y))\,\phi'_y(x,y) + f'_v\,(\phi(x,y), \psi(x,y))\,\psi'_y(x,y).$$

Implicit függvény tétel

Példa feladat: Adott a síkban az $F(x, y) = 0$ görbe.



A görbe egy pontja, (a, b).

A pont környezetében keressük azt az $y = f(x)$ függvényt, melyre $F(x, f(x)) = 0$ és $f(a) = b$.

$y = f(x)$ a görbét megadó $F(x, y) = 0$ IMPLICIT FÜGGVÉNY explicit alakja.

Implicit függvény tétel

Tétel.

- *Tfh* $F(x_0, y_0) = 0$.
- *Tfh F differenciálható* (x_0, y_0) *egy környezetében.*
- *Tfh* $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ *(azaz az érintősík "ferde").*

Ekkor $\exists I = I_1 \times I_2 = (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \times (y_0 - \beta, y_0 + \beta)$, *intervallum, hogy* $\forall x \in I_1$*-re az* $F(x, y) = 0$ *egyenletnek* $\exists! y = f(x)$ *megoldása (azaz* $F(x, f(x)) = 0$*) és* $y \in I_2$.

Implicit függvény tétel, $F(x, y) = 0$

Tétel. (folytatás)

Tehát létezik egy $f : I_1 \to I_2$ függvény, melyre:

- $f(x_0) = y_0$.
- $f(x) \in I_2, \forall x \in I_1$.
- $F(x, f(x)) = 0, \forall x \in I_1$.
- $F'_y(x, f(x)) \neq 0, \forall x \in I_1$.

Továbbá f differenciálható I_1-ben, és deriváltja: $f'(x) = -\dfrac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$.

Megjegyzések

1. Az implicit függvény tétel a görbe *lokális tulajdonság*áról szól.

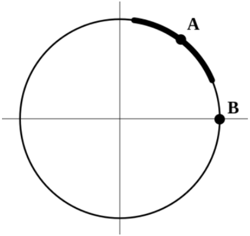
2. Csak *egzisztenciáról* van szó: *létezik* a megfelelő függvény. Nincs konstrukció.

A tételt nem bizonyítjuk. Ha már *tudjuk*, hogy f differenciálható, akkor deriváljuk az $F(x, f(x)) = 0$ egyenletet x szerint:

$$F'_x(x, f(x)) \cdot 1 + F'_y(x, f(x))f'(x) = 0,$$

ahonnan a Tétel utolsó állítása következik, $f'(x) = -\dfrac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$.

Példa. $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = \pm\sqrt{1-x^2}$.



Konkrét (x_0, y_0) mellett három eset lehetséges.

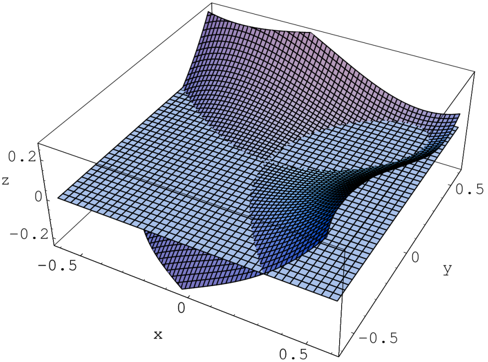
A Ha $x_0 \in (-1,1)$ és $y_0 > 0$, akkor $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

A- Ha $x_0 \in (-1,1)$ és $y_0 < 0$, akkor $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$.

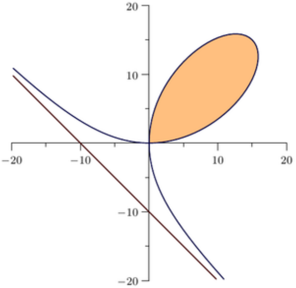
B Ha $x_0 = \pm 1$, $y_0 = 0$. $\Rightarrow$ $F'_y(x_0, 0) = 0$, a mo nem folytatható.

Descartes-féle görbe

$a > 0$ egy valós paraméter, és $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$.



$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$



$$F'_x(x, y) = 3x^2 - 3ay,$$

$$F'_y(x, y) = 3y^2 - 3ax.$$

$F'_x(0,0) = F'_y(0,0) = 0, \quad \Longrightarrow \quad (0,0)$ körül $\nexists$ explicit mo. A görbe $\forall$ más pontja alkalmas kiindulási pontnak.

Az explicit függvény deriváltja:

$$f'(x) = -\frac{3x^2 - 3ay}{3y^2 - 3ax} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax} = \frac{af(x) - x^2}{f^2(x) - ax}$$

$F(x, f(x)) = 0$, további deriváltak

Az explicit függvény deriváltjának kiszámításakor ezt használtuk:

$$F'_x(x, f(x)) \cdot 1 + F'_y(x, f(x))f'(x) = 0,$$

Újabb deriválással f a második deriváltja megkapható:

$$F''_{xx}(x, f(x)) + F''_{yx}(x, f(x))f'(x) + F''_{xy}(x, f(x))f'(x) +$$

$$+ F''_{yy}(x, f(x))(f'(x))^2 + F'_y(x, f(x))f''(x) = 0. \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = \ldots \checkmark$$