Kétváltozós függvények differenciálszámítás

2020. március

Differenciálható függvény

Ismétlés. Az f differenciálható az (x_0, y_0) pontban, ha így írható:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + o(\|(\Delta x, \Delta y)\|)$$

ahol $\Delta x = x - x_0$ és $\Delta y = y - y_0$.

Geometriai jelentés: $f(x,y)$ közelíthető az érintősíkkal.

$$f(x,y) \approx z = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0).$$

A sík (egyik) normálvektora: $\underline{n} = (f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0), -1)$.

Iránymenti derivált

Definíció.

Legyen $\alpha \in [0, 2\pi)$. *Az* α *irányú* IRÁNYMENTI DERIVÁLT*:*

$$D_\alpha f(x, y) = \lim_{\varrho \to 0+} \frac{f(x + \varrho \cos \alpha, y + \varrho \sin \alpha) - f(x, y)}{\varrho},$$

ha ez a határérték létezik. Másik jelölés: $\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, y)$.

Megjegyzés. Speciális esetben, ha $\alpha = 0$, akkor $D_0 f(x, y) = f'_x(x, y)$

ill. ha $\alpha = \pi/2$, akkor $D_{\pi/2} f(x, y) = f'_y(x, y)$.

Állítás. Tegyük fel, hogy az f függvény differenciálható (x, y)-ban. Ekkor (x, y)-ban minden $\alpha \in [0, 2\pi)$ esetén $\exists D_\alpha f(x, y)$, és

$$D_\alpha f(x, y) = f'_x(x, y)\cos\alpha + f'_y(x, y)\sin\alpha.$$

Bizonyítás. A differenciálhatóság miatt

$$f(x+\varrho\cos\alpha, y+\varrho\sin\alpha) = f(x, y)+f'_x(x, y)\varrho\cos\alpha+f'_y(x, y)\varrho\sin\alpha+o(|\varrho|)$$

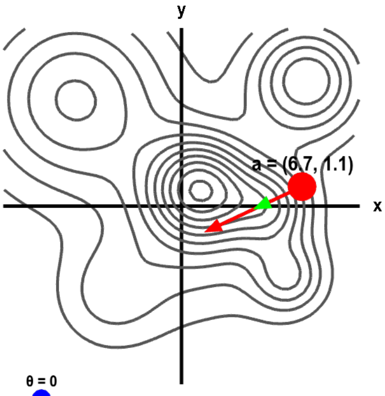
Ebből következik, hogy

$$\frac{f(x+\varrho\cos\alpha, y+\varrho\sin\alpha) - f(x, y)}{\varrho} = f'_x(x, y)\cos\alpha+f'_y(x, y)\sin\alpha+\frac{o(|\varrho|)}{\varrho}$$

melynek határértéke $\varrho \to 0+$ esetén: $f'_x(x, y)\cos\alpha + f'_y(x, y)\sin\alpha$.

Geometriai jelentés

Differenciálhatóság $\Longrightarrow$ ”minden irányban sima”.



Iránymenti derivált, általában

Definíció.

Adott $v = (v_1, v_2)$ *irány, melyre* $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$.

A v IRÁNYMENTI DERIVÁLT *az* (x, y) *pontban:*

$$D_v f(x, y) = \lim_{\varrho \to 0+} \frac{f(x + \varrho v_1, y + \varrho v_2) - f(x, y)}{\varrho},$$

ha ez a határérték létezik.

Következmény. Ha f differenciálható, akkor $D_v f(x, y)$ kiszámítása:

$$D_v f(x, y) = v_1\, f'_x(x, y) + v_2\, f'_y(x, y) = \langle \mathrm{grad}\, f, v \rangle.$$

Példa

Legyen $f(x,y) = x^2 + y^2$, $v = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.

$$f'_x(x,y) = 2x,\; f'_y(x,y) = 2y \quad \Longrightarrow \quad D_\alpha f(x,y) = 2x\cos\alpha + 2y\sin\alpha.$$

Adott r sugarú kör mentén: $x_0 = r\cdot\cos\theta$, $y_0 = r\cdot\sin\theta$.

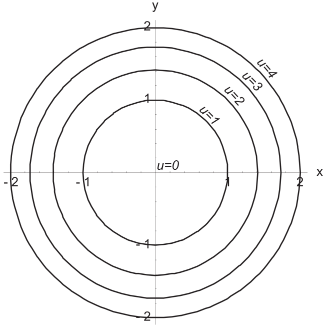
$$D_\alpha f(x_0,y_0) = 2r\cos\theta\cos\alpha + 2r\sin\theta\sin\alpha = 2r\cos(\theta-\alpha)$$

Látható, hogy

- $D_\alpha f(x_0,y_0)$ maximális, ha $\alpha = \theta$,
- $D_\alpha f(x_0,y_0) = 0$, ha $\theta - \alpha = \pi/2$.

Vajon hogyan értelmezhetjük geometriailag ezt a tényt?

Az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény szintvonalai:



- $D_\alpha f(x_0, y_0)$ maximális, ha $\alpha = \theta$,
- $D_\alpha f(x_0, y_0) = 0$, ha $\theta - \alpha = \pi/2$.

Másodrendű deriváltak

Definíció.

Adott $f : D \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, és $(x_0, y_0) \in \operatorname{int} D$.

f KÉTSZER DIFFERENCIÁLHATÓ *ebben a pontban, ha*

- *$f(x, y)$ differenciálható az (x_0, y_0) egy környezetében,*
- *és $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ differenciálhatóak az (x_0, y_0) pontban.*

Tétel.

Ha f kétszer diff-ható (x_0, y_0) -ban, akkor $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

Hesse mátrix

Definíció.

Ha a függvény kétszer differenciálható, akkor a függvény MÁSODIK DERIVÁLTJA *egy mátrix:*

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{yx}(x_0, y_0) \\ \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

$H(x_0, y_0)$ *az adott ponthoz tartozó* HESSE MÁTRIX*.*

Következmény. Hesse mátrix mindig szimmetrikus.

n-változós függvény

Ismétlés. $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ n-VÁLTOZÓS FÜGGVÉNY:

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n).$$

Az i-dik változó szerinti PARCIÁLIS DERIVÁLT:

$$f'_{x_i}(x) = \lim_{\xi \to x_i} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1} \dots, x_n) - f(x_1, \dots x_i, \dots, x_n)}{\xi - x_i},$$

ha a fenti határtérték létezik és véges.

További jelölés $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)$.

Teljes derivált

$f: \ D \to \mathbf{R}$ n-változós valós függvény, x belső pontja D-nek.

Definíció.

Az f függvény TELJESEN DIFFERENCIÁLHATÓ *x-ben, ha $\exists A \in \mathbf{R}^n$, hogy minden $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ megváltozás esetén, melyre $x + \Delta x \in D$:*

$$f(x + \Delta x) = f(x) + A\Delta x + o(\|\Delta x\|),$$

ahol $\|\Delta x\| = \sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$*.*

Tétel.

Ha f differenciálható egy $a \in D$ belső pontban, akkor

$$A = (f'_{x_1}(a), \ldots, f'_{x_n}(a)) =: \mathrm{grad}\, f(a).$$

Tétel.

$f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{int}\, D$. *Ha az* a *valamely* U *környezetében*

- *léteznek az* $f'_{x_k}(x)$, $k = 1, \ldots n$ *parciális deriváltak,* $\forall x \in U$,
- *és folytonosak a-ban,*

akkor f differenciálható a- ban.

Második derivált

Definíció.

Tfh az f függvény parciális deriváltfüggvényei teljesen differenciálhatóak $x \in D_f$-ben.

A MÁSODIK DERIVÁLT *egy mátrix, $H(x) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ dimenziós mátrix, melynek (i,j)-dik eleme:*

$$H_{ij}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

$H(x)$ az x pontbeli HESSE MÁTRIX.

Iránymenti derivált

Definíció.

$f : D \to \mathbb{R}$, és $x \in \operatorname{int} D$. Adott $v = (v_1, \dots, v_n)$ irány, melyre $\|v\| = 1$.

Az f függvény v IRÁNYÚ DERIVÁLTJA, *ha létezik és véges ez a lim:*

$$D_v f(x) := \lim_{\varrho \to 0+} \frac{f(x + \varrho v) - f(x)}{\varrho}.$$

Tétel.

Ha f teljesen differenciálható x-ben, akkor minden v-re $\exists D_v f(x)$, és

$$D_v f(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i f'_{x_i}(x) = \langle \mathrm{grad}\, f(x), v \rangle.$$

Összetett függvény

$\equiv$" *Láncszabály két dimenzióban*"

Ismétlés. Láncszabály valós függvények esetén:

Legyen f a külső függvény, és g a belső függvény.

Feltesszük, hogy mindkettő differenciálható.

Ekkor $$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Láncszabály 2-dim-ban. 1. eset.

A *külső függvény* $f(u)$. A *belső függvény* $u = \phi(x, y)$,

$\Longrightarrow$ Az összetett függvény $F(x, y) := f(\phi(x, y))$.

Tétel.

- *Ha* $\phi : S \to \mathbf{R}$ *differenciálható az* $(x, y) \in \operatorname{int} S$ *pontban,*
- *és ha* $f : D \to \mathbf{R}$ *differenciálható* $u = \phi(x, y)$*-ban,*

akkor $F = f \circ \phi : S \to \mathbf{R}$ *differenciálható* (x, y)*-ban, és*

$$F'_x(x, y) = f'(\phi(x, y))\, \phi'_x(x, y), \quad F'_y(x, y) = f'(\phi(x, y))\, \phi'_y(x, y).$$

Bizonyítás.

$F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y) = f(\phi(x+\Delta x, y+\Delta y)) - f(\phi(x,y)) = (*)$

f differenciálható, ezért $f(u+\Delta u) - f(u) = f'(u)\,\Delta u + \varepsilon(\Delta u)$

$$\begin{aligned}(*) &= f'(\phi(x,y))\Delta\phi(x,y) + \varepsilon = \\ &= f'(\phi(x,y)) \cdot \left(\phi'_x(x,y)\Delta x + \phi'_y(x,y)\Delta y + \varepsilon_1\right) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y) =$$

$$= \left(f'(\phi(x,y))\phi'_x(x,y)\right)\Delta x + \left(f'(\phi(x,y))\phi'_y(x,y)\right)\Delta y + \varepsilon_2.$$

F differenciálható. A jobboldal fő tagja: $F'_x(x,y)\Delta x + F'_y(x,y)\Delta y$.

Példa

Legyen $F(x, y) = f^2(x, y)$, ahol $f(x, y)$ függvény differenciálható.

Külső függvény $z = u^2$, belső függvény $u = f(x, y)$.

Ekkor $\left(u^2\right)' = 2u$, ezért

$$F'_x(x, y) = 2f(x, y)\, f'_x(x, y), \quad F'_y(x, y) = 2f(x, y)\, f'_y(x, y).$$