Differenciálegyenletek. II. rész.

folytatás

2020. május

Inhomogén Lineáris DE

Lineáris differenciáloperátor:

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y, \quad a_j = a_j(x),\ j = 1, \ldots n.$$

INHOMOGÉN LDE: $L[y] = f$, ahol f adott függvény, azaz

$$y^{(n)}(x) + a_1(x) y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) y(x) = f(x).$$

Tfh az $L[y] = 0$ homogén egyenlet megoldásai ismertek.

Az n db lineárisan független megoldás $y_1, \ldots, y_n$.

A HLDE általános megoldása: $y = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k$, $c_k \in \mathbb{R}$.

Inhomogén LDE. $L[y] = f$

Tétel.

A LDE megoldásainak struktúrája:

1. *Ha* y_1 *a* <u>*H*</u> *LDE mo-a és* y_2 *az* <u>*IH*</u> *LDE mo-a*

$$\Downarrow$$

$y_1 + y_2$ *az* <u>*inhomogén*</u> *LDE mo-a*

2. *Ha* y_1 *és* y_2 *az* <u>*inhomogén*</u> *LDE mo-a*

$$\Downarrow$$

$y_1 - y_2$ *a* <u>*homogén*</u> *LDE mo-a*

Állandók variálása módszer

Az IH egyetlen megoldását keressük:

$$y_p(x) = \gamma_1(x)y_1(x) + \cdots + \gamma_n(x)y_n(x), \text{ "}c_k \sim \gamma_k(x)\text{"}.$$

Állítás. Az alábbi feltételek esetén:

$$\begin{aligned}
\gamma_1' y_1 + \cdots + \gamma_n' y_n &= 0 \\
\gamma_1' y_1' + \cdots + \gamma_n' y_n' &= 0 \\
&\vdots \\
\gamma_1' y_1^{(n-2)} + \cdots + \gamma_n' y_n^{(n-2)} &= 0 \\
\gamma_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + \gamma_n' y_n^{(n-1)} &= f(x)
\end{aligned}$$

$y := \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k$ valóban megoldás: $L[y] = f$.

Állandók variálása módszer

Kompakt formában a feltételek:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \\ \vdots \\ \gamma_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Baloldalon: Wronski-mátrix. Megoldható.$\surd$

BIZONYÍTÁS. Legyen $y = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k$. Deriváltja

$$y' = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k' y_k + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k' = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k'.$$

Hasonlóan $j < n$ -re: $y^{(j)} = 0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k^{(j)}$.

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k' y_k^{(n-1)} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k^{(n)} = f + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k^{(n)}.$$

Behelyettesítve, $L[y] = \sum_{k=1}^{n} L[\gamma_k y_k]$:

$$L[y] = f + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k L[y_k] = f, \quad \text{u.i.} \quad L[y_k] = 0.$$

Speciálisan. $y'' + a_1 y' + a_2 y = f$.

A HLDE alapmegoldásai: y_1, y_2.

Az IH partikuláris mo: $y_p = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2$, $\gamma_1(x) = \ \gamma_2(x) =$?

A feltételek:

$$\begin{aligned} \gamma_1' y_1 + \gamma_2' y_2 &= 0 \\ \gamma_1' y_1' + \gamma_2' y_2' &= f. \end{aligned}$$

Így a megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Példa. Harmonikus rezgés.

$$y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

1.) Homogén rész.

$$y'' + y = 0 \implies P(\lambda) = \lambda^2 + 1 \implies \lambda_{1,2} = \pm i.$$

$$\implies y_1 = \cos(x), \qquad y_2 = \sin(x).$$

Homogén általános mo. $y_h = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

2.) IH rész. $y_p = \gamma_1 \cos(x) + \gamma_2 \sin(x)$. $\gamma_1 = ?\quad \gamma_2 = ?$

$$\begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1'(x) \\ \gamma_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos(x)} \end{pmatrix}.$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \gamma_1'(x) \\ \gamma_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos(x)} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} \gamma_1'(x) &= -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} && \Longrightarrow \quad \gamma_1(x) = \ln(\cos(x)) \\ \gamma_2'(x) &= 1 && \Longrightarrow \quad \gamma_2(x) = x. \end{aligned}$$

3.) Ált. mo. $y_{alt}(x) = \big(\ln(\cos(x)) + c_1\big)\cos(x) + (x + c_2)\sin(x)$.

Próbafüggvények alkalmazása IH LDE megoldására

Állandó együtthatós IH LDE, melynek speciális a jobboldala, egyik partikuláris mo-a speciális alakú.

$$L[y] = y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n y(x) = f(x), \quad a_j \in \mathbb{R}.$$

Néhány alapeset:

- Ha $f(x) = Ke^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor $y(x) = Ae^{\alpha x}$, $A =?$
- Ha $f(x) = a_m x^m + \cdots + a_0$, akkor $y(x) = A_m x^m + \cdots + A_0$ alakú, $A_0, \ldots A_m =?$
- Ha $f(x) = K\sin(\alpha x)$ vagy $f(x) = K\cos(\alpha x)$, akkor $y(x) = A\sin(\alpha x) + B\cos(\alpha x)$ alakú, $A =?$ és $B =?$

Ha $f(x)$ függvények összege, akkor a próbafüggvény is összeg.

Kétdimenziós DER

Keresünk $y(x)$ és $z(x)$, melyek kielégítenek egy DER-t:

$$y'(x) = f(x, y(x), z(x)) \tag{1}$$

$$z'(x) = g(x, y(x), z(x)), \tag{2}$$

ahol f, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ típusúak.

Tétel.

$T \subset \mathbb{R}^3$, és $(x_0, y_0, z_0) \in \operatorname{int} T$. Tfh az $f, g : T \to \mathbb{R}$ függvényekre

$$|f(x, y, z) - f(x, \overline{y}, \overline{z})| \leq M(|y - \overline{y}| + |z - \overline{z}|)$$

Ekkor az (1), (2) DER-nek tetszőleges $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$ kezdetiértékkel $\exists!$ megoldása.

n-dimenziós DER

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} & y_1(x_0) = y_{10}, \\ & \vdots \\ & y_n(x_0) = y_{n0} \end{aligned}$$

Ismerős? Legyen $y^{(3)} + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = \phi(x)$.

Rendeljük hozzá következő DER-t:

$$y_1(x) = y(x), \qquad y_2(x) = y'(x), \qquad y_3(x) = y''(x)$$

Az összefüggések:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= -a_1 y_3 - a_2 y_2 - a_3 y_1 + \phi. \end{aligned}$$

3 dim. lineáris, állandó eühatós homogén. DER

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 & \qquad y_1(0) &= y_{01} \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 & \qquad y_2(0) &= y_{02} \; . \\ y_3' &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3, & \qquad y_3(0) &= y_{03} \end{aligned}$$

Kompakt alak:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix}, \quad Y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ y_3'(x) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

A DER így írható

$$Y'(x) = AY(x), \qquad Y(0) = Y_0. \tag{3}$$

Példa, folytatás

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_2 \\
y_2' &= y_3 \\
y_3' &= -a_3 y_1 - a_2 y_2 - a_1 y_3 + \phi.
\end{aligned}
$$

Az együttható-mátrix

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}.
$$

Ez a DE KISÉRŐ MÁTRIXa (companion matrix).

$Y'(x) = AY(x),\ Y(0) = Y_0.$

Tétel.

A lineáris DER megoldása: $Y(x) = e^{Ax} Y_0$.

Az e^A mátrix: $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

Pl. ha A szimmetrikus, akkor $A = UDU^T$, ahol

$$U^T U = UU^T = I, \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Ekkor $A^k = UDU^T \cdot UDU^T \cdots UDU^T = UD^k U^T$,

$$\Longrightarrow \quad e^A = Ue^D U^T, \quad \text{ahol} \quad e^D \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} \end{pmatrix}.$$

$Y'(x) = AY(x)$

Tétel.

Tfh A sajátértékei különbözőek: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

A megfelelő sajátvektorok s_1, s_2, s_3.

Ekkor a DER lineárisan független megoldás-rendszere

$$Y_k = e^{\lambda_k x} s_k, \qquad k = 1, 2, 3.$$

Továbbá $\forall Y(0) = Y_0 \in \mathbb{R}^3$ *kezdetiértékhez* $\exists! Y$ *megoldás, melyre:*

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + c_3 Y_3, \qquad c_k \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás.

1. $(Y_k = e^{\lambda_k x} s_k)$ lineárisan függetlenek: $\lambda_i \neq \lambda_j$ és $s_j \perp s_i$.
2. $Y_k = e^{\lambda_k x} s_k$ megoldás, u.i.

$$Y_k'(x) = \lambda_k e^{\lambda_k x} s_k,$$

$$AY_k(x) = Ae^{\lambda_k x} s_k = e^{\lambda_k x} As_k = e^{\lambda_k x} \lambda_k s_k.$$

$$\Longrightarrow \quad Y_k'(x) = AY_k(x).$$

Megjegyzés. A tétel akkor is igaz, ha minden többszörös sajátértékhez lineárisan független sajátvektor-rendszer tartozik.