Differenciálegyenletek. II. rész.

2018. május 7.

Differenciálegyenletek osztályozása

A differenciálegyenleteket (DE) osztályozhatjuk típusuk szerint:

- *Közönséges differenciálegyenlet*, ODE

  $y = y(x) =?$ Pl a rezgőmozgás DE :

$$y''(x) + y(x) = 0.$$

- *Parciális differenciálegyenlet*, PDE

  $u = u(x, y, \dots) =?$

  Pl: $u = u(x, y) =?$

$$u''_{xx}(x, y) + u''_{yy}(x, y) = 0.$$

További osztályozás

- DE RENDJE n, ha az ismeretlen függvény legmagasabb rendű deriváltja n.
- DE lehet IMPLICIT és EXPLICIT alakú:

  DE explicit, ha olyan $y = y(x)$ függvényt keresünk, melyre

  $$y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}).$$

  A DE implicit, ha nem explicit. Pl. $F(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0$.

Lineáris DE

A DE LINEÁRIS, ha $y, y', \ldots, y^{(n)}$ lineáris kifejezése szerepel:

$$a_1(x)y^{(n)}(x) + a_2(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n+1}(x)y(x) = f(x),$$

ahol az $a_k = a_k(x)$.

A LDE HOMOGÉN, ha $f(x) = 0$, egyébként inhomogén.

Ha $a_k \epsilon \mathbb{R}$, akkor *állandó együtthatós* DE.

Elsőrendű DE

Általános alak: $y' = f(x, y)$, ahol $f : D \to \mathbb{R}$, ahol $D \subset \mathbb{R}^2$

DE megoldása: $(a, b) \subset \mathbb{R}$ intervallum, ezen $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ függvény, melyre

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad \forall x \epsilon (a, b)$$

Elsőrendű DE. Geometriai reprezentáció

A DE-hez tartozó IRÁNYMEZŐ:

$\forall (x, y) \epsilon D$-ben adott $f(x, y)$ iránytangensű pici szakasz.

A DE megoldása: Olyan görbét keresünk, melynek minden pontjában az érintő $\equiv$ kijelölt irány.

Ez az INTEGRÁLGÖRBE.

Ha adott (x_0, y_0) kezdőpont, akkor olyan görbét keresünk, mely átmegy ezen a ponton.

Picard tétel

KEZDETI ÉRTÉK FELADAT, vagy CAUCHY-PROBLÉMA

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

Tétel. (Egzisztencia és unicitás)

Adott $(x_0, y_0) \epsilon \operatorname{int} D$. $f : D \to \mathbb{R}$ *folytonos, és* $\exists L > 0$:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < L|y_1 - y_2| \qquad \forall (x, y_1),\ (x, y_2) \epsilon D.$$

Ekkor létezik $I = (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, *és* $y : I \to \mathbb{R}$ *megoldás , ami egyértelmű.*

Néhány speciális elsőrendű differenciálegyenlet. Ism.

1. *Szeparábilis DE*. $y' = h(x)g(y)$. Ennek megoldása:

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x) dx.$$

2. *Szeparábilisra visszavezethető DE.* Pl. $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ alakú.

   Ekkor az $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ helyettesítéssel: $u' = \frac{f(u) - u}{x}$.

3. *Lineáris DE:* $y' = a(x)y + f(x)$.

4. *Lineáris helyettesítéssel megoldható DE*: $y' = f(ax + by)$

   alakú. Ekkor $u(x) = ax + by(x)$: helyettesítéssel

$$u' = a + bf(u).$$

Lineáris differenciálegyenlet

Lineáris Differenciál Egyenlet LDE **általános eset**:

$$y' = ay + b$$

ahol $a = a(x),\ b = b(x)$ ahol $a(x)$, $b(x)$ adott függvények.

– Ha $b(x) \equiv 0$, akkor a DE *homogén*

– Ha $b(x) \neq 0$, akkor a DE *inhomogén*.

Homogén LDE

$$y' = ay, \qquad a = a(x)$$

Állítás.

A homogén LDE általános megoldása:

$$y(x) = ce^{A(x)}, \quad c \epsilon \mathbb{R}$$

ahol

$$A(x) = \int a(x) dx$$

az *a* függvény egyik primitív függvénye

Állandó együtthatós homogén LDE

Speciális eset.

$$y' = ay, \qquad y(x_0) = y_0$$

ahol $a(x) \equiv a$ konstans, és x_0, y_0 adott számok.

A Cauchy feladat megoldása

$$y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}.$$

Inhomogén LDE. $y' = ay + b$

Tétel.

A LDE megoldásainak struktúrája:

1. *Ha y_1 a H LDE mo-a és y_2 az IH LDE mo-a*

   $$\Downarrow$$

   $y_1 + y_2$ *az inhomogén LDE mo-a*

2. *Ha y_1 és y_2 az inhomogén LDE mo-a*

   $$\Downarrow$$

   $y_1 - y_2$ *a homogén LDE mo-a*

Inhomogén LDE. $y' = ay + b$

A homogén egyenlet megoldása $y = ce^{A(x)}$, ahol $c \epsilon \mathbb{R}$, $A' = a$.

Az inhomogén egyenlet megoldását így keressük:

$$y = u(x)e^{A(x)}, \qquad u = u(x) = ?$$

$(c \simeq u(x))$, konstans helyett függvény.

Az inhomogén DE általános megoldása:

$$y(x) = \underbrace{e^{A(x)}\Bigg(c}_{} + \underbrace{\int b(x)e^{-A(x)}dx}_{}\Bigg)$$

– az első tag a homogén egyenlet általános megoldása,

– a második az inhomogén egyenlet egy konkrét megoldása.

Lineárisan független függvények

Definíció.

Adott $y_1, y_2, \ldots, y_n : D \to \mathbb{R}$, *közös* $D \subset \mathbb{R}$ *ÉT.Ezek* LINEÁRISAN FÜGGETLENEK, *ha*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x) \equiv 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c_1 = \ldots = c_n = 0.$$

1.*Példa.* $y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = x, \quad \ldots, \quad y_n(x) = x^{n-1}$, és $D = (a, b)$. Tetszőleges lineáris kombinációjuk polinom:

$$c_1 + c_2 x + \ldots c_n x^{n-1}.$$

Ha egy polinom egy intervallumon eltűnik, akkor valóban minden együtthatója 0.

2.*Példa.* $D = [0, 2\pi]$, és

$$y_1(x) = \sin(x), \quad y_2(x) = \sin(2x), \quad \dots \quad y_n(x) = \sin(nx).$$

Trig. rendszer ortogonális $\Longrightarrow$ lineárisan ftlenek.

3.*Példa.* $D = [0, 2\pi]$, és

$$y_1(x) = \sin^2(x), \quad y_2(x) = \cos(2x), \quad y_3(x) = \cos^2(x).$$

Lineárisan összefüggők.

4. *Példa.* $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. $I \subset \mathbb{R}$ intervallum.

$$y_1(x) = e^{a_1 x}, \quad y_2(x) = e^{a_2 x}, \quad \dots, \quad y_n(x) = e^{a_n x}$$

A rendszer lineárisan független. Teljes indukció n-re. $\surd$

Feltétel lineáris függetlenségre

Definíció.

Tfh $y_1, \ldots, y_n : D \to \mathbb{R}$ $(n-1)$*-szer differenciálhatóak. A* WRONSKI DETERMINÁNS*:*

$$W[y_1, \ldots, y_n](x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

$W[y_1, \ldots, y_n] : D \to \mathbb{R}$ *is egy valós függvény.*

Állítás. Tfh $y_1, \ldots, y_n : D \to \mathbb{R}$ lineárisan összefüggőek és $(n-1)$-szer differenciálhatók. Ekkor

$$W[y_1, \ldots, y_n] = 0.$$

Bizonyítás. Lineárisan összefüggőek $\implies$

$$c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n = 0, \quad \text{pl} c_1 \neq 0$$

Ekkor: $y_1 = -\dfrac{c_2}{c_1} y_2 - \ldots - \dfrac{c_n}{c_1} y_n.$

Ugyanígy: $y_1' = -\dfrac{c_2}{c_1} y_2' - \ldots - \dfrac{c_n}{c_1} y_n'. \quad y_1^{(k)} = \ldots$

Tehát a mátrix első oszlopa $\equiv$ többi lineáris kombinációja

$\implies$ a mátrix szinguláris.

Lineáris függetlenség és Wronski determináns

Következmény. Ha $W[y_1, \ldots, y_n](x) \neq 0$ valamely x-ben, akkor $y_1, \ldots, y_n$ lineárisan független rendszert alkotnak.

Állítás. Ha $y_1, \ldots, y_n$ n-szer differenciálhatók D-ben, akkor $W[y_1, \ldots, y_n] = 0$, $\Longleftarrow$ $y_1, \ldots, y_n$ lineárisan összefüggőek.

Példa.

$$y'(x) + g(x)y(x) = 0.$$

Legyen ennek két megoldása y_1 és y_2. Ezek Wronski determinánsa:

$$W[y_1, y_2] = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ -g(x)y_1 & -g(x)y_2 \end{pmatrix} = 0.$$

$\Longrightarrow$ Lineárisan összefüggőek, $y_1 = cy_2$ vmely $c \epsilon \mathbb{R}$.

Következmény. Az elsőrendű HLDE megoldása KONSTANS SZORZÓTÓL eltekintve egyértelmű. Ha adott egy megoldása, akkor az összes többi kifejezhető ennek konstans-szorosaként.