

Fourier transzformáció.

2018. május 3.

A Fourier transzformáció bevezetése

Tfh $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kielégíti az alábbi feltételeket:

1. $\forall [a, b] \subset \mathbb{R}$ esetén $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ véges sok pontot kivéve folytonosan differenciálható.
2. az x_0 szakadási pontban $f(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$.
3. f abszolút integrálható:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

A Fourier transzformáció bevezetése

Definíció.

Ha f teljesíti az 1. 2. 3. feltételeket, akkor FOURIER TRANSZFORMÁLTJA az alábbi $\hat{f} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ függvény:

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx.$$

Fourier transzformált másik jelölése

$$\mathcal{F}(f, s) = \hat{f}(s).$$

$f(x)$: az időtartomány-ban adott,

$\hat{f}(s)$ a frekvenciatartomány-ban adott.

A FT egy komplex függvény integrálja:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(sx) dx - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(sx) dx.\end{aligned}$$

Belátjuk, hogy $\widehat{f}(s)$ - mint improprius integrál - jól definiált:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-isx}| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

Kicsit közelebbről megvizsgáljuk. $B > 0$ -ra definiáljuk:

$$\widehat{f}_B(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-B}^B f(x)e^{-ixs} dx.$$

Ekkor $\widehat{f}(s) = \lim_{B \rightarrow \infty} \widehat{f}_B(s)$.

$$\begin{aligned}
 |\widehat{f}(s) - \widehat{f}_B(s)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>B} |f(x)| |e^{-ixs}| dx = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-B} |f(x)| dx + \int_B^{\infty} |f(x)| dx \right).
 \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty \implies \forall \varepsilon > 0 \text{-hoz } \exists B_0, \text{ ha } B > B_0, \text{ akkor}$$

$$\int_{-\infty}^{-B} |f(x)| dx + \int_B^{\infty} |f(x)| dx < \varepsilon,$$

$$\implies |\widehat{f}(s) - \widehat{f}_B(s)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon, \quad \forall s \in \mathbf{R}.$$

$\widehat{f}_B(s)$ egyenletesen konvergál $\widehat{f}(s)$ -hez, $B \rightarrow \infty$ esetén.

Az alaptétel

Tétel.

Tfh $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ teljesíti az 1.-2.-3. feltételeket. Ekkor:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{isx} ds.$$

Ez az inverz Fourier transzformáció.

Megjegyzés. Elégséges feltétel az egyenletes konvergenciához:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)| dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f''(x)| dx < \infty.$$

FT és inverz FT.

Tfh $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ teljesíti az 1.-2.-3. feltételeket.

$$f(x) \quad \longleftrightarrow \quad \hat{f}(s).$$

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad \longleftrightarrow \quad \hat{f} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}.$$

Fourier transzformáció – Inverz Fourier transzformáció:

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{isx} ds.$$

Tétel. (Fourier sorok alaptétele, komplex alak. Ismétlés.)

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π szerint *periodikus* függvény, mely $[-\pi, \pi]$ -ben teljesíti az 1.-2.-3. feltételeket.

Ekkor

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ikx}, \quad \text{ahol} \quad \alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Analógia:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{isx} ds, \quad \hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx.$$

FT TULAJDONSÁGAI

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(sx) dx - i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(sx) dx \right).$$

Ha f páros, akkor FT valós értékű

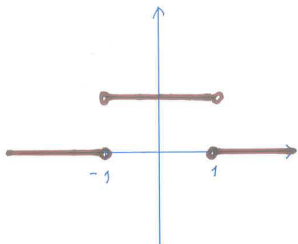
$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(sx) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos(sx) dx.$$

Ha f páratlan, akkor FT tisztán képzetes:

$$\hat{f}(s) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(sx) dx = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin(sx) dx.$$

1. *Példa.* Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$



f páros, ezért

$$\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \cos(sx) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin s}{s}.$$

2. *Példa.* Legyen $f(x) = e^{-|x|}$. Ez páros függvény. FT:

$$\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} \cos(sx) dx = ?$$

A múlt félévben igazoltuk, hogy

$$\int e^{-x} \cos(bx) dx = e^{-x} \frac{-\cos(bx) + b \sin(bx)}{1 + b^2} + c$$

Ezért

$$\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} \cos(sx) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + s^2}.$$

2. *Példa.* Legyen $f(x) = e^{-k|x|}$. Páros függvény. FT:

$$\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-kx} \cos(sx) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k}{k^2 + s^2}.$$

A múlt félévben igazoltuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(bx) dx &= \left[e^{-ax} \frac{1}{a^2 + b^2} (-a \cos(bx) + b \sin(bx)) \right]_0^{\infty} = \\ &= \frac{a}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

A Fourier transzformált alaptulajdonságai

Állítás.

1. Linearitás:

$$\mathcal{F}(cf, s) = c\mathcal{F}(f, s), \mathcal{F}(f + g, s) = \mathcal{F}(f, s) + \mathcal{F}(g, s).$$

Bizonyítás. Az integrál lineáris operátor.

2. Ha f folytonos, akkor $\mathcal{F}(f)$ is **folytonos**.

Bizonyítás. A FT *folytonos* függvények *egyenletes* határérté.

3. (Átskálázás) $\mathcal{F}(f(ax), s) = \frac{1}{a}\mathcal{F}(f(x), \frac{s}{a})$, ha $a > 0$.

$$\mathcal{F}(f(ax), s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-isx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\frac{s}{a}y} \frac{1}{a} dy.$$

4. (Idő megfordítása)

$$\mathcal{F}(f(-x), s) = \mathcal{F}(f(x), -s).$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(-x), s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x) e^{-isx} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} f(y) e^{isy} (-dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i(-s)y} dy.\end{aligned}$$

5. (Idő eltolás)

$$\mathcal{F}(f(x - x_0), s) = e^{-ix_0 s} \mathcal{F}(f(x), s).$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(x - x_0), s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0) e^{-isx} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-is(y+x_0)} dy.\end{aligned}$$

6. (Frekvencia eltolás)

$$\mathcal{F}(e^{ikx} f(x), s) = \mathcal{F}(f(x), s - k).$$

$$\mathcal{F}(e^{ikx} f(x), s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(x) e^{-isx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(s-k)x} dx.$$

A Fourier transzformált alaptulajdonságai

Állítás.

1. Linearitás:

$$\mathcal{F}(cf, s) = c\mathcal{F}(f, s), \mathcal{F}(f + g, s) = \mathcal{F}(f, s) + \mathcal{F}(g, s).$$

2. Ha f folytonos, akkor $\mathcal{F}(f)$ is folytonos.

3. (Átskálázás) $\mathcal{F}(f(ax), s) = \frac{1}{a}\mathcal{F}(f(x), \frac{s}{a})$, ha $a > 0$.

4. (Idő megfordítása) $\mathcal{F}(f(-x), s) = \mathcal{F}(f(x), -s)$.

5. (Idő eltolás) $\mathcal{F}(f(x - x_0), s) = e^{-ix_0s}\mathcal{F}(f(x), s)$.

6. (Frekvencia eltolás) $\mathcal{F}(e^{ikx}f(x), s) = \mathcal{F}(f(x), s - k)$.