Analízis II.

9. hét

Témák:

- Kettős integrál normáltartományon
- Polárkoordinátákra áttérés
- Kettős integrál alkalmazása térfogatszámításra
- Hármas integrál

Órai feladatok:

Kettős integrál normáltartományon

1. Adjuk meg az alábbi tartományokat képletekkel, "mindkét" irányból. Rajzolja le a tartományokat minden diák önállóan:

   (a) R háromszög-tartomány, melynek csúcsai: $A(1;1)$, $B(4;5)$, $C(4;2)$.

   (b) R négyszög-tartomány, melynek csúcsai: $A(0;0)$, $B(5;0)$, $C(1;2)$, $D(4;2)$.

   (c) Legyen R az $y = x^2$ és az $y = 2x$ görbék által közrezárt tartomány.

2. Egy R háromszög-tartomány csúcsai: $A(1;1)$, $B(4;5)$, $C(4;2)$.

$$\iint\limits_R xy \; d(x,y) = ?$$

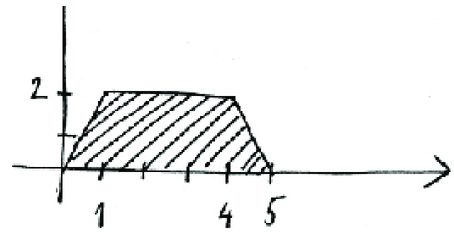
3. Jelölje R az $y = x^2$ és az $y = 2x$ görbék által közrezárt tartományt. Határozzuk meg az alábbi integrált kétféleképpen, ahogy R mindkét irányban normáltartomány.

$$\iint\limits_R \left(x^3 + 4y\right) \; d(x,y) = ?$$

(*A másik irány HF.*)

4. Legyen R az ábrán megadott tartomány.

$$\iint\limits_R (x+y)\, d(x,y) = ?$$



5. Számítsuk ki mindkét sorrendben (+rajzot készítsenek a diákok előtte):

$$\int\limits_0^1 \int\limits_y^1 \left(x^2+y^2\right)\; dx\, dy.$$

A sorrendcsere után a határok változására fel kell hívni a diákok figyelmét!

6. * Határozzuk meg az alábbi integrál értékét a változók sorrendjének felcserélésével:

$$\int\limits_0^1 \int\limits_x^1 \sin(y^2)\, dy\, dx = ?$$

(Nem trivi a feladat, mert az integrálás az eredeti a sorrendben nem megy!)

Megoldás alapötlete: A változók sorrendjének cseréjével:

$$\int\limits_0^1 \int\limits_x^1 \sin(y^2)\, dy\, dx = \int\limits_0^1 \int\limits_0^y \sin(y^2)\, dx\, dy = \int\limits_0^1 y \sin(y^2)\, dy = \left[-\frac{1}{2}\cos(y^2)\right]_0^1 = ...$$

és ez már kiszámolható.

Polárkoordinátákra áttérés

7. R a felső félsík azon tartománya, melyet az $x^2+y^2=1$ és $x^2+y^2=4$ körök fognak közre. Határozzuk meg az alábbi integrált

$$\iint\limits_R \left(3x+y^2\right)\; d(x,y),$$

8. Legyen T az egységkör fele, ahol $x \geq 0$. Mennyi az integrál értéke:

$$\iint\limits_T (2x+y)\; d(x,y) = ?$$

Kettős integrál alkalmazása térfogatszámításra

9. Egy ellipszoid térfogatát szḿoljuk ki, a mellékelt slide/k alapján.

10. Határozzuk meg az alábbi felületek által határolt test térfogatát: $\{x^2 + y^2 = 16\}$, $\{3x + 4y + z = 20\}$, $\{z = 0\}$.

<u>Hármas integrál.</u>

11. (Henger koordináták bevezetése a cél.) Írjuk fel hengerkoordinátákban azt az R tartományt , mely az $x^2 + y^2 = 4$ hengernek a $z = 0$ és a $z = 8$ síkok közötti része.

$$\iiint\limits_R (x^2 + y^2) \ d(x, y, z) = ?$$

12. (*Tartalék.* Lehet konzultáción) Legyen R az egységgömbnek a koordinátarendszer pozitív nyolcadába eső része. Számítsuk ki az alábbi integrált:

$$\iiint\limits_R \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} \ d(x, y, z) = ?$$