Matematikai Analízis II.

6. hét

Témák:

- Érintősík
- Iránymenti derivált. Szemléletes jelentése
- Láncszabály

Érintősík. Iránymenti derivált. Szemléletes jelentése.

1. Írjuk fel az alábbi függvények grafikonjához a megadott pontban húzott érintősík egyenletét. (A pontokat az első két koordinátájukkal adjuk meg.)

$$f(x,y) = x^2 + 3y^2, \quad P_0 = (1,\, 2);$$

$$g(x,y) = 2e^{-x}\cos y, \quad P_0 = (0,\, \frac{\pi}{3}).$$

2. Határozzuk meg az $f(x,y) = \ln(xy)$ függvény grafikonjának azt a pontját, amelyben az érintősík párhuzamos az $x + y + z = 0$ egyenletű síkkal.

3. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P_0 = (2,-1,3)$ ponton, normálvektora pedig megegyezik az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$ függvény grafikonjához a $(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2})$ változó értékhez tartozó pontjában húzott érintősík normál-vektorával.

4. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^3y^2$ függvény $P_0(-1,2)$ pontbeli iránymenti deriváltját az alábbi irányok mentén:

   (a) $v = (4,-3)$

   (b) $\alpha = 120°$

   (c) az $A(1,2)$ pontból a $B(2,5)$ pontba mutató irány.

5. Határozzuk meg az $f(x,y) = \sin(xy)$ függvény $P_0(\frac{1}{4}, \pi)$ pontbeli iránymenti deriváltját $\alpha = 210°$ irányban.

Láncszabály

Írjuk fel az összetett függvényeket, és számoljuk ki a deriváltját (derváltjait)

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$, $x = t^3$, $y = 1 + t^2$.
2. $f(x,y) = xe^y + ye^{-x}$, $x = e^t$, $y = st^2$.
3. Legyen $z = x^2y + 3xy^2$, ahol $x = \sin(t)$ és $y = \cos(t)$. Mit jelent ez a helyettesítés? Határozzuk meg a $\frac{dz}{dt}$ deriváltat a $t = 0$ helyen.
4. A láncszabály alapján írjuk fel az alábbi összetett függvény deriváltját:

$$f(x,y) = \ln \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$