ANALÍZIS II. Példatár

Differenciálegyenletek. II. rész.

2009. április

4. fejezet

Feladatok

4.1. Állandó együtthatós lineáris DE

Határozzuk meg a következő állandó együtthatós lineáris DE-k általános megoldását:

$\boxed{\textbf{4.1.}}$ $y'' - y = 0$

$\boxed{\textbf{4.2.}}$ $y'' + y = 0$

$\boxed{\textbf{4.3.}}$ $y'' + 2y' - 15y = 0$

$\boxed{\textbf{4.4.}}$ $y'' + 2y' + y = 0$

$\boxed{\textbf{4.5.}}$ $y'' + 12y' + 45y = 0$

$\boxed{\textbf{4.6.}}$ $y^{(5)} - y' = 0$

$\boxed{\textbf{4.7.}}$ $y^{(5)} - 8y''' + 16y' = 0$

$\boxed{\textbf{4.8.}}$ $y^{(7)} + 2y^{(5)} + y''' = 0$

4.9. $y^{(4)} - y = 0$

4.10. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

4.11. $y'' - 6y' + 8y = 0$

4.12. $4y'' + 4y' + y = 0$

4.13. $y'' - 2y' + 5y = 0$

4.14. $6y'' - 5y' + y = 0$

4.15. $y'' - 10y' + 25y$

4.16. $4y'' + 12y' + 9y = 0$

4.17. $y^{(6)} - 4y^{(5)} + 6y^{(4)} - 4y''' + y'' = 0$

4.18. $y^{(5)} + y''' - 6y' = 0$

4.19. $y^{(6)} + 4y^{(4)} + 4y'' = 0$

4.20. $y^{(7)} - 4y^{(5)} + 4y''' = 0$

4.21. $y^{(4)} - 2y'' = 0$

$\boxed{\textbf{4.22}}$ $y^{(4)} + 4y = 0$

Írjuk fel az alábbi inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldását a homogén egyenlet alaprendszerének ismeretében.

$\boxed{\textbf{4.23.}}$

$$y'' + y' - 6y = x, \qquad y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^{-3x}$$

4.24.

$$y'' + 2y' + 5y = \frac{1}{e^x \cos 2x}, \qquad y_1 = e^{-x}\cos 2x; \quad y_2 = e^{-x}\sin 2x$$

4.25.

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{(1-x)^2}, \qquad y_1 = e^x; \quad y_2 = xe^x$$

4.26.

$$y'' + 4y = \frac{8}{\cos 2x}, \qquad y_1 = \cos 2x; \quad y_2 = \sin 2x$$

4.27.

$$y'' - 4y = \frac{8}{e^x + 1}, \qquad y_1 = e^{2x}; \quad y_2 = e^{-2x}$$

4.2. Másodrendű homogén lineáris DE

$\boxed{\textbf{4.28.}}$ Határozzuk meg az

$$x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$$

differenciálegyenlet általános megoldását, ha egy partikuláris megoldás az $y_1(x) = x$ függvény.

Határozzuk meg az alábbiakban adott differenciálegyenletek általános megoldását egy $y_1 = y_1(x)$ partikuláris megoldás ismeretében.

4.29.

$$xy'' - (x+1)y' - 2(x-1)y = 0; \quad y_1 = e^{2x}$$

4.30.

$$(1+x^2)\, y'' + xy' - y = 0; \quad y_1 = x;$$

4.31.

$$y'' \sin^2 x - 2y = 0; \quad y_1 = \operatorname{ctg} x$$

4.32.

$$(x-1)^2\, y'' + x(x-1)y' + (x-2)y = 0; \qquad y_1 = \frac{1}{x-1}$$

4.34.

$$x^2y'' - xy' - 3y = 0; \quad y_1 = x^3$$

4.35.

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0; \quad y_1 = x^2$$

4.36.

$$(1 - x^2)\, y'' - xy' = 0; \quad y_1 = \arcsin x$$

4.37.

$$xy'' - (1 + x)y' + y = 0; \quad y_1 = x + 1$$

$\boxed{\textbf{4.38.}}$ Írjuk fel az

$$\left(x^2 + 1\right) y'' + 2xy' - 2y = 0$$

differenciálegyenletet $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$ kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldását, ha $y_1 = x$ partikuláris megoldás.

Írjuk fel az alábbi differenciálegyenletek adott kezdeti feltételeket kielégítő megoldását, ha a differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását ismerjük.

4.39.

$$(2x - x^2)\, y'' + (x^2 - 2)\, y' + 2(1 - x)y = 0; \quad y_1 = x^2$$

$$y(1) = e, \quad y'(1) = 3e$$

4.40.

$$\sin^2 x \; y'' + \sin x \; \cos x \; y' - y = 0; \quad y_1 = \operatorname{ctg} \, x$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \qquad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$$

4.41.

$$(2x + 1)y'' + (4x - 2)y' - 8y = 0; \quad y_1 = e^{-2x}$$

$$y(0) = 5, \quad y'(0) = -4$$

4.42.

$$(1 - x)y'' + xy' - y = 0; \quad y = e^x$$

$$y(0) = -2, \quad y'(0) = 1$$

4.3. Másodrendű inhomogén lineáris DE

$\boxed{\textbf{4.43.}}$ Határozzuk meg az

$$x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = (x \ln x - x)^2$$

egyenlet általános megoldását.

Határozzuk meg az alábbi inhomogén lineáris differenciálegyenletek általános megoldását, a homogén egyenlet egy partikuláris megoldásának ismeretében.

4.44.

$$y'' \sin^2 x - y' \sin x \, \cos x + y = \sin x; \quad y_1(x) = \sin x$$

4.45.

$$x^2(1 - 2\ln x)y'' + x(1 + 2\ln x)y' - 4y = 2x \ln x - 3x; \qquad y_1(x) = x^2$$

4.46.

$$2(x+1)^2 \, y'' - (x+1)y' + y = x; \qquad y_1(x) = \sqrt{x+1}$$

4.47.

$$xy'' - (1+x)y' + y = x^2 e^x \qquad y_1(x) = x + 1$$

4.48.

$$(x \cos x - \sin x)y'' + x \sin x y' - \sin x \; y = (x \cos x - \sin x)^2$$

$$y_1(x) = x$$

Határozzuk meg az alábbi inhomogén lineáris differenciálegyenletek adott kezdeti feltételt kielégítő megoldását a homogén lineáris differenciálegyenlet egy partikuláris megoldásának ismeretében:

4.49.

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3 \sin x; \quad y_1 = x^2;$$

$$a) \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi; \qquad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$b) \quad y(0) = 0; \qquad y'(0) = 2$$

4.50.

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-x^2}}; \quad y_1 = e^{2x};$$
$$y(0) = 3; \qquad y'(0) = 1$$

4.4. Állandó-együtthatós lineáris inhomogén DE

Írja fel az alábbi diferenciálegyenletek általános megoldását.

$\boxed{\textbf{4.51.}}$ $y'' + 2y' + y = x \sin x$ $\boxed{\textbf{4.52.}}$ $y^{(4)} - 4y'' + 3y = 3e^{\frac{x}{2}}$

$\boxed{\textbf{4.53.}}$ $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x} + \cos x$

$\boxed{\textbf{4.54.}}$ $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x} \cdot \cos x$

$\boxed{\textbf{4.55.}}$ $y'' - y = (2x+3)e^{x}$ $\boxed{\textbf{4.56.}}$ $y'' + y = -4\cos x$

4.57. $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = 8e^{x}(2x-1)$

4.58. $y'' + y' - 12y = \text{sh } x$ **4.59.** $y'' - y' - 2y = 8e^{3x}$

4.60. $y'' - 2y' - 3y = 2\cos 3x$

4.61. $y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$

4.62. $y''' - 4y' = xe^{2x} + \sin x + x^2$

4.63. $y'' - y' - 12y = 4x^2 - 6x - 3$

4.64. $y'' - 3y' - 4y = e^{2x} + 2\sin x$

4.65. $y''' + 2y'' + y' = 1 + e^{-x}$

4.66. $y^{(4)} + 2y''' + 5y'' + 8y' + 4y = \cos x + 40e^{x}$

4.67. $y^{(3)} + y'' + y' + y = xe^x$

4.68. $y'' - 3y' + 2y = 2e^x \cos \dfrac{x}{2}$

4.69. $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = (x+1)e^x$

4.70. $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{9x^2 + 6x + 2}{x^3}$

4.71. $y'' + y = \operatorname{tg} x$

4.72. $y'' + y = 2 \sin x \ \sin 2x$

4.73. $2y'' + 5y' = 29x \ \sin x$

4.74. $y'' + 4y' - 5y = 1$

4.75. $y'' - 9y = 3\operatorname{sh} 3x$

4.76. $y''' - 2y'' - y' + 2y = \operatorname{ch} 2x$

Határozzuk meg az alábbi állandó együtthatójú inhomogén lineáris differenciálegyenletek adott kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldását.

4.77.

$$4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-\frac{3}{2}x}$$
$$y(0) = 3, \quad y'(0) = -5.5$$

4.78.

$$y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$$
$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.2$$

4.79.

$$y'' - y' = 2(1-x), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

4.80.

$$y'' - 2y' = e^x \left(x^2 + x - 3\right), \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2$$

4.81.

$$y'' + y + \sin 2x = 0 \qquad y(\pi) = 1, \quad y'(\pi) = 1$$

4.5. Állandó-együtthatós lineáris inhomogén DE és Laplace transzformáció

Az alábbi kezdetiérték feladatokat oldjuk meg Laplace-transzformáció segítségével:

4.82.

$$y'' - y' = 2 - 2x; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

4.83.

$$y'' - 3y' - 4y = e^{-x}; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4$$

4.84.

$$y'' - 4y' + 4y = 8\sin 2x; \quad y(0) = 2; \quad y'(0) = 4$$

4.85.

$$y'' + 4y' + 4y = 2\cos 3x; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

4.86.

$$y'' + 4y' + 4y = 4\sin 4x; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

4.87.

$$y'' - 2y' + y = 6xe^{x}; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$$

4.88.

$$y'' + 5y' + 4y = e^{3x}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

4.89.

$$y'' + 5y' + 4y = e^{-x}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

4.90.

$$y'' - y' - 12y = 3x - 2; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

4. fejezet

Megoldások

4.1. Állandó együtthatós lineáris DE

$\boxed{\textbf{4.1.}}$ Keressük a megoldást $y = e^{\lambda x}$ alakban. Ekkor:

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x},$$

ezért a differenciálegyenlet

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - e^{\lambda x} = 0.$$

Mivel $e^{\lambda x} \neq 0$, tehát $\lambda^2 - 1 = 0$, s innen $\lambda = \pm 1$. A megoldás tehát:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Figyelembe vesszük, hogy a partikuláris megoldások lineáris kombinációja is megoldás, tehát az

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch } x, \text{ illetve } \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh } x$$

függvények is megoldásai a differenciálegyenletnek. Ezek lineárisan függetlenek is, mert:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \text{ch } x & \text{sh } x \\ \text{sh } x & \text{ch } x \end{vmatrix} = 1.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$y = C_1 \text{ch } x + C_2 \text{sh } x.$$

alakban is írható.

Érdemes megjegyezni, hogy valahányszor a karakterisztikus egyenletnek abszolut értékben egyező, de előjelben különböző, megegyező multiplicitású gyöke van, akkor a differenciálegyenletnek alaprendszere

$$e^{\alpha x}, e^{-\alpha y}, \text{ vagy ch } \alpha x, \text{sh } x\alpha \text{ is lehet!}$$

$\boxed{\textbf{4.2.}}$ Az $y'' + y = 0$ differenciálegyenletnek karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Innen $\lambda = \pm i$. A megoldás tehát:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{\textbf{4.3.}}$ A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0$, innen

$$\lambda_{1,2} \;=\; \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2}.$$

Két különböző valós gyököt kapunk, $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -5$, s így:

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-5x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{\textbf{4.4.}}$ Az $y'' + 2y' + y = 0$ egyenlet karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Azt kapjuk, hogy

$$(\lambda + 1)^2 = 0,$$

ezér $\lambda_{1,2} = -1$ kétszeres gyök. Így:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^{-x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{\textbf{4.5.}}$ A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 + 12\lambda + 45 = 0$, ahonnan:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 180}}{2} = -6 \pm 3i.$$

A karakterisztikus egyenletnek konjugált komplex gyökei vannak. Ezért az általános megoldás:

$$y(x) = e^{-6x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{\textbf{4.6.}}$ Az $y = e^{\lambda x}$ megoldás függvényt behelyettesítve

$$\lambda^5 - \lambda = \lambda\left(\lambda^4 - 1\right) = \lambda\left(\lambda^2 + 1\right)\left(\lambda^2 - 1\right) = 0$$

karakterisztikus egyenlethez jutunk. Ennek megoldásai:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1, \quad \lambda_4 = i, \quad \lambda_5 = -i$$

Az általános megoldás:

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{-x} + C_4 \cos x + C_5 \sin x.$$

Mivel a $|\lambda_2| = |\lambda_3|$ és $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ ez még így is írható (l. 1. feladat):

$$y(x) = C_1 + C_2 \mathrm{ch}\ x + C_3 \mathrm{sh}\ x + C_4 \cos x + C_5 \sin x.$$

$\boxed{\textbf{4.7.}}$ A karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{aligned}\lambda^5 - 8\lambda^3 + 16\lambda &= \lambda\left(\lambda^4 - 8\lambda^2 + 16\right) = \lambda\left(\lambda^2 - 4\right)^2 = \\ &= \lambda\left(\lambda - 2\right)^2\left(\lambda + 2\right)^2 = 0.\end{aligned}$$

A gyökök tehát:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0 \\ \lambda_{2,3} &= 2 \text{ , kétszeres gyök} \\ \lambda_{4,5} &= -2 \text{ , kétszeres gyök}\end{aligned}$$

Általános megoldás:

$$y(x) = C_1 + \left(C_2 + C_3 x\right)e^{2x} + \left(C_4 + C_5 x\right)e^{-2x},$$

és ez

$$y(x) = C_1 + \left(A_1 + A_2 x\right)\text{sh } 2x + \left(B_1 + B_2 x\right)\text{ch } 2x$$

alakban is írható.

$\boxed{\textbf{4.8.}}$ A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^7 + 2\lambda^5 + \lambda^3 = \lambda^3\left(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1\right) = \lambda^3\left(\lambda^2 + 1\right)^2 = 0$$

A gyökök:

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2,3} &= 0, \text{ háromszoros gyök} \\ \lambda_{4,5,6,7} &= \pm i, \text{ kétszeres konjugált komplex gyökpár}\end{aligned}$$

A megoldás:

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \left(A_1 x + A_2\right)\cos x + \left(B_1 x + B_2\right)\sin x.$$

4.9.

$$\begin{aligned}y(x) &= C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x = \\ &= C_1 \text{sh } x + C_2 \text{ch } x + C_3 \cos x + C_4 \sin x.\end{aligned}$$

4.10. $y(x) = \left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2\right)e^{-x}$.

4.11. $y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{2x}$

4.12. $y(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^{-\frac{1}{2}x}$.

4.13. $y(x) = e^x \left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)$.

4.14. $y(x) = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{\frac{1}{3}x}$.

4.15. $y(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^{5x}$.

4.16. $y(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^{-\frac{3}{2}x}$.

4.17. $y(x) = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 x^4 + C_6 x^5)\, e^x$.

4.18.

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 + C_2 e^{\sqrt{2}x} + C_3 e^{-\sqrt{2}x} + C_4 \cos\sqrt{3}x + C_5 \sin\sqrt{3}x = \\ &= C_1 + C_2 \mathrm{ch}\ \sqrt{2}x + C_3 \mathrm{sh}\ \sqrt{2}x + C_4 \cos\sqrt{3}x + C_5 \sin\sqrt{3}x. \end{aligned}$$

4.19. $y(x) = C_1 x + C_2 + (C_3 + C_4 x)\cos\sqrt{2}x + (C_5 + C_6 x)\sin\sqrt{2}x$.

4.20.

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + (C_4 + C_5 x)\,\mathrm{sh}\ \sqrt{2}x + (C_6 + C_7 x)\,\mathrm{ch}\ \sqrt{2}x = \\ &= C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + (A_1 + A_2 x)\, e^{\sqrt{2}x} + (B_1 + B_2 x)\, e^{-\sqrt{2}x}. \end{aligned}$$

4.21.

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{\sqrt{2}x} + C_4 e^{-\sqrt{2}x} =$$
$$= C_1 + C_2 x + C_3 \mathrm{sh}\ \sqrt{2}x + C_4 \mathrm{ch}\ \sqrt{2}x.$$

$\boxed{\textbf{4.22.}}$ A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^4 + 4 = 0, \text{ innen } \lambda = \sqrt[4]{-4}$$

azaz:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + i \\ \lambda_2 &= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 + i \\ \lambda_3 &= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 - i \\ \lambda_4 &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - i \end{aligned}$$

Így a partikuláris megoldások:

$$\begin{array}{ll} e^x \cos x, & e^x \sin x \\ e^{-x} \cos x, & e^{-x} \sin x \end{array}$$

Mivel a megoldások lineáris kombinációja is megoldás, így megoldások az alábbi függvények is:

$$\begin{aligned} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cos x &= \text{ch } x \cos x \\ \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cos x &= \text{sh } x \cos x \\ \frac{e^x + e^{-x}}{2} \sin x &= \text{ch } x \sin x \\ \frac{e^x - e^{-x}}{2} \sin x &= \text{sh } x \sin x. \end{aligned}$$

Bizonyítható, hogy az így nyert függvények alaprendszert alkotnak, mert a belőlük felírt Wronski-féle determináns nem zérus. Így:

$$y(x) = e^x \left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) + e^{-x} \left(C_3 \cos x + C_4 \sin x\right),$$

illetve

$$y(x) = \left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) \text{ch } x + \left(C_3 \cos x + C_4 \sin x\right) \text{sh } x.$$

4.23. Az inhomogén lineáris differrenciálegyenlet általános megoldása a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldásának összege. A homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása az alaprendszer ismeretében felírható:

$$y_{hom} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása:

$$y_0 = \gamma_1(x) e^{2x} + \gamma_2(x) e^{-3x}$$

alakban keresendő.

Az ismeretlen függvények deriváltjait a

$$\begin{aligned} \gamma_1'(x) y_1 + \gamma_2'(x) y_2 &= 0 \\ \gamma_1'(x) y_1' + \gamma_2'(x) y_2' &= x \end{aligned}$$

egyenletrendszerből számolhatjuk. Behelyettesítve az alapmegoldásokat, az egyenletrendszer kompakt alakban így írható:

$$\begin{pmatrix} e^{2x} & e^{-3x} \\ 2e^{2x} & -3e^{-3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix},$$

Cramer-szabállyal meghatározzuk ennek a lineáris egyenlet rendszernek a megoldását:

$$D = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-3x} \\ 2e^{2x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -5e^{-x};$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-3x} \\ x & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -xe^{-3x};$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & x \end{vmatrix} = xe^{2x};$$

Innen:

$$\gamma_1'(x) = \frac{-xe^{-3x}}{-5e^{-x}} = \frac{1}{5}xe^{-2x}; \qquad \gamma_2'(x) = \frac{xe^{2x}}{-5e^{-x}} = -\frac{1}{5}xe^{3x}$$

Integrálással:

$$\gamma_1(x) = -e^{-2x}\left(\frac{x}{10} + \frac{1}{20}\right); \qquad \gamma_2(x) = -e^{3x}\left(\frac{x}{15} - \frac{1}{45}\right)$$

$$\begin{aligned} y_0(x) &= -e^{-2x}\left(\frac{x}{10} + \frac{1}{20}\right)e^{2x} - e^{3x}\left(\frac{x}{15} - \frac{1}{45}\right)e^{-3x} = \\ &= -\frac{x}{6} - \frac{1}{36}. \end{aligned}$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} - \frac{x}{6} - \frac{1}{36}.$$

4.24.

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1e^{-x}\cos 2x + C_2e^{-x}\sin 2x + \frac{e^{-x}}{4}\cos 2x\,\ln(\cos 2x) + \\ &+ \frac{e^{-x}x}{2}\sin 2x \end{aligned}$$

4.25.

$$y(x) = e^x \left(C_1 + C_2 x + \ln \frac{1}{1-x} \right)$$

4.26.

$$y(x) = \cos 2x \left(C_1 + 2\ln(\cos 2x) \right) + \sin 2x \left(C_2 + 4x \right)$$

4.27.

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} +$$
$$+2\left[xe^{2x} + e^x - e^{-x} - \left(e^{2x} - e^{-2x} \right) \ln(e^x + 1) \right] - 1.$$

4.2. Másodrendű homogén lineáris DE

$\boxed{\textbf{4.28.}}$ Az $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$ differenciálegyenletek az $y_1 = x$ partikuláris megoldástól lineárisan független megoldását szorzat alakban keressük.

$$y_2(x) = C(x)\ x$$

Deriváljuk és az egyenletbe helyettesítjük. Mivel:

$$y_2'(x) = C'\ x + C \qquad y_2''(x) = C''\ x + 2C'$$

$$x^2(\ln x - 1)(C''x + 2C') - x(C'x + C) + Cx = 0.$$

A $C(x)$ - függvény deriváltjai szerint rendezve:

$$C''x^3(\ln x - 1) + C'\left(2x^2(\ln x - 1) - x^2 \right) = 0.$$

A kapott másodrendű differenciálegyenletet $C' = p(x)$ helyettesítéssel elsőrendű szétválasztható változójú egyenletre vezetjük vissza:

$$\frac{p'}{p} = \frac{-2x^2(\ln x - 1) + x^2}{x^3(\ln x - 1)} = -\frac{2}{x} + \frac{1}{x(\ln x - 1)}$$

Integrálva:

$$\ln p = \ln \frac{1}{x^2} + \ln(\ln x - 1) = \ln \frac{\ln x - 1}{x^2},$$

ahonnan:

$$p = \frac{dC}{dx} = \frac{\ln x - 1}{x^2}$$

Újabb integrálással

$$C = \int \frac{\ln x - 1}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x},$$

így

$$y_2(x) = -\frac{\ln x}{x} x = -\ln x.$$

A keresett általános megoldás a két partikuláris megoldás lineáris kombinációja:

$$y(x) = C_1 x + C_2 \ln x.$$

$y_1(x)$ és $y_2(x)$ lineárisan függetlenek, hiszen

$$|\underline{\underline{W}}(x)| = \begin{vmatrix} x & \ln x \\ 1 & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = (1 - \ln x) \neq 0.$$

4.29. $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2(1 + 3x)e^{-x}$.

4.30. $y(x) = C_1 x + C_2\sqrt{1 + x^2}$

4.31. $y(x) = C_1 \text{ctg } x + C_2(1 - x \cdot \text{ctg } x)$.

4.32.

$$y(x) = \frac{1}{x - 1}\left[C_1 + C_2 x e^{-x}\right].$$

4.33.

$$y(x) = \frac{1}{x}\left[C_1(1 + x)e^{-x} + C_2\right].$$

4.34.

$$y(x) = C_1 x^3 + \frac{C_2}{x}.$$

4.35. $y(x) = C_1 x^2 + C_2 x$.

4.36. $y(x) = C_1 \arcsin x + C_2$.

4.37. $y(x) = C_1(x + 1) + C_2 e^x$

$\boxed{\textbf{4.38.}}$ A differenciálegyenlet

$$y'' + \frac{2x}{x^2+1}y' - \frac{2}{x^2+1}y = 0$$

alakban írhatjuk. Mivel $y_1 = x$, a másik partikuláris megoldást $y_2 = v(x)x$ alakban keressük.

$$\begin{aligned} y_2' &= v'x + v \\ y_2'' &= v''x + v' + v'. \end{aligned}$$

Behelyettesítve:

$$v''x + \left(2 + \frac{2x^2}{x^2+1}\right)v' = 0.$$

Vezessük be a $v' = p$ jelölést. Ekkor $v'' = p'$, és a fenti egyenlet így írható:

$$p'x = -2\left(1 + \frac{x^2}{x^2+1}\right)p.$$

Szétválasztva a változókat:

$$\frac{p'}{p} = \left(-\frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1}\right),$$

innen

$$\int \frac{dp}{p} = \int \left(-\frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1}\right)dx.$$

Az integrálást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\ln p = -2\ln x - \ln\left(1+x^2\right) = \ln\frac{1}{x^2\left(1+x^2\right)}.$$

Így:

$$v' = p = \frac{1}{x^2\left(1+x^2\right)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2},$$

és újabb integrálással:

$$v = \int\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = -\frac{1}{x} - \arctan x.$$

A másik alapmegoldás

$$y_2 = x\left(-\frac{1}{x} - \arctan x\right) = -1 - x\arctan x.$$

Az általános megoldás:

$$y = C_1 x + C_2(1 + x \arctan x).$$

A partikuláris megoldást keresve:

$$\begin{aligned} y(0) &= C_2 = 2 \\ y'(0) &= C_1 = 1. \end{aligned}$$

A feladat megoldása tehát:

$$y = x + 2 + 2x \arctan x.$$

4.39. $y(x) = 2ex^2 - e^x$.

4.40.

$$y(x) = \frac{1 - 3\cos x}{\sin x}.$$

4.41. $y(x) = 2e^{-2x} + 3\left(4x^2 + 1\right)$.

4.42. $y(x) = 3x - 2e^x$.

4.3. Másodrendű inhomogén lineáris DE

$\boxed{\textbf{4.43.}}$ A homogén egyenlet általános megoldása $y = C_1 x + C_2 \ln x$ (lásd a 5.28. feladat).

Az inhomogén egyenlet egy $y_0(x)$ megoldását az állandók variálása módszerével határozzuk meg. Végigosztjuk az inhomogén egyenletet a második derivált együtthatójával:

$$y'' - \frac{1}{x(\ln x - 1)} y' + \frac{1}{x^2(\ln x - 1)} y = \ln x - 1.$$

A megoldást $y_0 = \gamma_1(x) x + \gamma_2(x) \cdot \ln x$ alakban keressük.

Az ismeretlen együtthatókra a

$$\begin{aligned} \gamma_1' x + \gamma_2' \ln x &= 0; \\ \gamma_1' + \gamma_2' \frac{1}{x} &= \ln x - 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszert nyerjük.

Cramer-szabállyal:

$$\gamma_1' = \frac{|\underline{\underline{W_1}}|}{|\underline{\underline{W}}|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \ln x \\ \ln x - 1 & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & \ln x \\ 1 & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix}} = -\frac{\ln x(\ln x - 1)}{1 - \ln x} = \ln x$$

$$\gamma_2' = \frac{|\underline{\underline{W_2}}|}{|\underline{\underline{W}}|} = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \ln x - 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & \ln x \\ 1 & \frac{1}{x} \end{vmatrix}} = \frac{x(\ln x - 1)}{1 - \ln x} = -x$$

integrálva:

$$\gamma_1 = \int \ln x dx = x(\ln x - 1); \qquad \gamma_2 = \int (-x) dx = -\frac{x^2}{2}$$

Az integrálási állandót zérusnak vehetjük, hiszen egyetlen partikuláris megoldást keresünk! A partikuláris megoldás tehát:

$$y_0(x) = (x \ln x - x)x - \frac{x^2}{2} \ln x = \frac{x^2}{2} \ln x - x^2.$$

A keresett általános megoldás:

$$y(x) = C_1 x + C_2 \ln x + \frac{x^2}{2}(\ln x - 2).$$

4.44.

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \sin x \cdot \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} \left(\ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^2.$$

4.45.

$$y(x) = C_1 x^2 + C_2 \ln x + x.$$

4.46.

$$y(x) = C_1 \sqrt{x+1} + C_2(x+1) + (x+1)\ln(x+1) - 1.$$

4.47.

$$y(x) = C_1(x+1) + C_2 e^x + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right) e^x.$$

4.48.

$$y(x) = C_1 x + C_2 \sin x + x \cos x + \frac{x^2}{2} \sin x.$$

4.49. A differenciálegyenletet osszuk végig a második derivált együtthatójával:

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = x \sin x$$

A homogén egyenlet egy partikuláris megoldása $y_1 = x^2$. A szokott módszerrel megtalálható a másik partikuláris megoldás $y_2 = x$. A két függvény lineárisan független.

A homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{hom} = C_1 x^2 + C_2 x.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása:

$$y_0 = \gamma_1(x) x^2 + \gamma_2(x) x$$

A $\gamma(x)$ és $\gamma_2(x)$ függvények az

$$\begin{pmatrix} x^2 & x \\ 2x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \sin x \end{pmatrix}$$

egyenletrendszerből számíthatók.

$$\gamma_1' = \sin x; \quad \gamma_2' = -x \sin x.$$

Integrálva

$$\gamma_1 = -\cos x; \quad \gamma_2 = x \cos x - \sin x$$

A keresett partikuláris megoldás:

$$y_0 = -x^2 \cos x + x^2 \cos x - x \sin x = -x \sin x$$

Az általános megoldás:

$$y(x) = y(x) = C_1 x_2 + C_2 x - x \sin x$$

a) Az $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi$ és $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldás a

$$\begin{aligned} C_1\frac{\pi^2}{4}+C_2\frac{\pi}{2} &= \frac{3\pi}{2} \\ C_1\pi+C_2 &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszerből számítható:

$$C_1=-\frac{4}{\pi}, \qquad C_2=4$$

A keresett megoldás:

$$y=5x-\frac{4}{\pi}x^2-x\sin x$$

b) Az $y(0)=0$ és $y'(0)=2$ feltételeket kielégítő megoldás nem létezik, mert az $x=0$ hely a differenciálegyenletnek szinguláris helye. (Nincs értelmezve!)

4.50. $y(x)=e^{2x}\left(2-5x+x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}\right)$

4.4. Állandó-együtthatós lineáris inhomogén DE

$\boxed{\textbf{4.51.}}$ A lineáris differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének a $\lambda_{1,2}=-1$ kétszeres gyöke. Ezért a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{hom}=(C_1+C_2x)\,e^{-x}.$$

Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet partikuláris megoldását

$$y_0(x)=(Ax+B)\sin x+(Cx+D)\cos x$$

alakban kereshetjük, ugyanis az inhomogenitást okozó függvény $x\sin x$, s ilyen esetben a megoldásban fellép az $x\cos x$ függvény is. Az x szorzó miatt viszont elsőfokú polinommal kell a trigonometrikus függvényeket szorozni. Deriváljunk:

$$\begin{aligned} y_0' &= A\sin x+(Ax+B)\cos x+C\cos x-(Cx+D)\sin x= \\ &= (A-D-Cx)\sin x+(C+B+Ax)\cos x \\ y_0'' &= -C\sin x+(A-D-Cx)\cos x+A\cos x- \\ &- (C+B+Ax)\sin x= \\ &= -(2C+B+Ax)\sin x+(2A-D-Cx)\cos x \end{aligned}$$

Behelyettesítünk az inhomogén differenciálegyenletbe:

$$\begin{aligned} - & \quad (2C + B + Ax)\sin x + (2A - D - Cx)\cos x + \\ + & \quad (2A - 2D - 2Cx)\sin x + (2C + 2B + 2Ax)\cos x + \\ + & \quad (Ax + B)\sin x + (Cx + D)\cos x \equiv x\sin x. \end{aligned}$$

Együttható összehasonlítással a következő egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} x\sin x \text{ szorzóiból} & \; : \; -A - 2C + A = 1 \\ x\cos x \text{ szorzóiból} & \; : \; -C + 2A + C = 0 \\ \sin x \text{ szorzóiból} & \; : \; -2C - B + 2A - 2D + B = 0 \\ \cos x \text{ szorzóiból} & \; : \; 2A - D + 2C + 2B + D = 0 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$A = 0; \quad B = \frac{1}{2}; \quad C = -\frac{1}{2}; \quad D = \frac{1}{2}.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása:

$$y_0 = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}(1 - x)\cos x$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\, e{-}x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}(1 - x)\cos x.$$

4.52. A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^4 - 4\lambda^2 + 3 = 0$$

A gyökök:

$$\lambda_1 = \sqrt{3} \qquad \lambda_2 = -\sqrt{3}$$

$$\lambda_3 = 1, \qquad \lambda_4 = -1.$$

A homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{hom} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{\sqrt{3}x} + C_4 e^{-\sqrt{3}x},$$

illetve

$$y_{hom} = C_1 \text{ch } x + C_2 \text{sh } x + C_3 \text{sh } \sqrt{3}x + C_4 \text{ch } \sqrt{3}x - \sqrt{3}x.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása $y_0 = Ae^{\frac{x}{2}}$ alakú. Differenciálva és az egyenletbe behelyettesítve:

$$\frac{1}{16}Ae^{\frac{x}{2}} - 4\frac{1}{4}Ae^{\frac{x}{2}} + 3Ae^{\frac{x}{2}} = 3e^{\frac{x}{2}}.$$

Innen: $A = \dfrac{16}{11}$. Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{\sqrt{3}x} + C_4e^{-\sqrt{3}x} + \frac{16}{11}e^{\frac{x}{2}},$$

vagy

$$y(x) = C_1\text{ch } x + C_2\text{sh } x + C_3\text{ch } \sqrt{3}x + C_4\text{sh } \sqrt{3}x + \frac{16}{11}e^{\frac{x}{2}}.$$

4.53. Az $y''' + 3y'' + 3x + y = e^{-x} + \cos x$ inhomogén differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3 = 0.$$

A $\lambda = -1$ háromszoros gyök, így a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{hom} = \left(C_1 + C_2x + C_3x^2\right)e^{-x}.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását két részből tesszük össze.

Legyen $y_1(x)$ az

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}$$

és $y_2(x)$ az

$$y'' + 3y'' + 3y' + y = \cos x$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet partikuláris megoldása. Ekkor:

$$y_0(x) = y_1(x) + y_2(x).$$

Az $y_1(x)$ függvény meghatározásánál figyelembe kell vennünk, hogy a $\lambda = -1$ a homogén egyenlet karakterisztikus egyenletének háromszoros gyöke, s így háromszoros rezonancia van. Ezért a megoldást

$$y_1(x) = Ax^3e^{-x}$$

alakban keressük. Deriválva

$$\begin{aligned}
y_1' &= \left(3Ax^2 - Ax^3\right) e^{-x} \\
y_1'' &= \left(6Ax - 3Ax^2 - 3Ax^2 + Ax^3\right) e^{-x} \\
y_1''' &= \left(6A - 12Ax + 3Ax^2 - 6Ax + 6Ax^2 - Ax^3\right) e^{-x},
\end{aligned}$$

és behelyettesítve:

$$\begin{aligned}
Ae^{-x}\left(-x^3 + 9x^2 - 18Ax + 6A\right) &+ Ae^{-x}\left(3x^3 - 18x^2 + 18Ax\right) + \\
+Ae^{-x}\left(-3x^3 + 9x^2\right) &+ Ae^{-x}x^3 = e^{-x}.
\end{aligned}$$

Összevonva $6Ae^{-x} = e^{-x}$, innen $A = \dfrac{1}{6}$, tehát

$$y_1(x) = \frac{1}{6}x^3e^{-x}.$$

Az y_2 függvényt $y_2(x) = B\cos x + D\sin x$ alakban kereshetjük. Ennek deriváltjai:

$$\begin{aligned}
y_2' &= -B\sin x + D\cos x \\
y_2'' &= -B\cos x - D\sin x \\
y_2''' &= B\sin x - D\cos x.
\end{aligned}$$

Innen

$$B\sin x - D\cos x + 3(-B\cos x - D\sin x) + 3(-B\sin x + D\cos x) +$$

$$+D\sin x \equiv \cos x.$$

Együttható összehasonlítással:

$$\begin{aligned}
\sin x \text{ szorzóiból} &: \; B - 3D - 3B + D = 0 \\
\cos x \text{ szorzóiból} &: \; -D - 3B + 3D + B = 1.
\end{aligned}$$

Innen $B = -\dfrac{1}{4}$, $D = \dfrac{1}{4}$, tehát

$$y_2(x) = -\frac{1}{4}\cos x + \frac{1}{4}\sin x.$$

Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y(x) = \left(C_1 + C_2x + C_3x^2\right) e^{-x} + \frac{1}{6}xe^{-x} - \frac{1}{4}\cos x + \frac{1}{4}\sin x.$$

$\boxed{\textbf{4.54.}}$ $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}\cos x$ inhomogén lineáris differenciálegyenlethez tartozó homogén lineáris differenciálegyenletet már az előző (5.53.) feladatban megoldottuk:

$$y_{hom} = \left(C_1 + C_2x + C_3x^2\right) e^{-x}.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$y_0 = (A\cos x + B\sin x)e^{-x}$$

alakban keressük. (Figyeljük meg, hogy itt nincs rezonancia!)

$$\begin{aligned}
y_0' &= (-A\sin x + B\cos x - A\cos x - B\sin x)e^{-x} = \\
&= \left[(-A-B)\sin x + (B-A)\cos x\right] e^{-x}. \\
y_0'' &= e^{-x}\left[(-A-B)\cos x - (B-A)\sin x + (A+B)\sin x + \right. \\
&+ \left. (A-B)\cos x\right] = (-2B\cos x + 2A\sin x)e^{-x}. \\
y_0''' &= \left[2B\sin x + 2A\cos x + 2B\cos x - 2A\sin x\right] e^{-x} = \\
&= \left[(2B-2A)\sin x + (2A+2B)\cos x\right] e^{-x}.
\end{aligned}$$

Behelyettesítünk a differenciálegyenletbe:

$$\begin{aligned}
y_0''' &= e^{-x}[(2B-2A)\sin x + (2A+2B)\cos x] \\
3y_0'' &= e^{-x}[6A\sin x - 6B\cos x] \\
3y_0' &= e^{-x}[(-3A-3B)\sin x + (3B-3A)\cos x] \\
y_0 &= e^{-x}[B\sin x + A\cos x]
\end{aligned}$$

Összegezve:

$$e^{-x}\cos x \equiv e^{-x}[A\sin x + (-B)\cos x]$$

Együttható összehasonlítással:

$$A = 0; \quad B = -1.$$

A partikuláris megoldás: $\qquad y_0(x) = -e^{-x}\sin x.$

A keresett általános megoldás:

$$y(x) = \left(C_1 + C_2x + C_3x^2 - \sin x\right) e^{-x}.$$

$\boxed{\textbf{4.55.}}$ Az 5.1. feladatban láttuk, hogy homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{hom} = C_1 e^x + C_2 e^{-x},$$

mely ilyen alakban is írható

$$y_{hom} = c_1 \text{ch } x + c_2 \text{sh } x.$$

Mivel a differenciálegyenlet jobboldalán - egy polinom szorzótól eltekintve - a homogén differenciálegyenlet partikuláris megoldása áll, rezonancia van. Ezért az inhomogén egyenlet megoldását ilyen alakban keressük:

$$y_0 = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x.$$

Deriválva:

$$\begin{aligned} y_0' &= \left(Ax^2 + Bx + 2Ax + B\right) e^x \\ y_0'' &= \left(Ax^2 + Bx + 2Ax + B + 2Ax + B + 2A\right) e^x \end{aligned}$$

Behelyettesítve az egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$(2x + 3)e^x = (4Ax + 2A + 2B)e^x$$

Az együtthatókat összehasonlítva:

$$4A = 2; \quad 2A + 2B = 3, \quad \text{azaz} \quad A = \frac{1}{2}; \quad B = 1.$$

Így:

$$y_0(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) e^x.$$

A keresett általános megoldás:

$$y(x) = \left(C_1 + \frac{1}{2}x^2 + x\right) e^x + C_2 e^{-x}.$$

$\boxed{\textbf{4.56.}}$ Az 5.2. feladatban láttuk, hogy a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{hom} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

A rezonancia miatt az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$y_0(x) = x(A \cos x + B \sin x)$$

alakban kell keresnünk. Deriváljunk:

$$\begin{aligned} y_0' &= -Ax\sin x + Bx\cos x + A\cos x + B\sin x \\ y_0'' &= -Ax\cos x - Bx\sin x - A\sin x + B\cos x - A\sin x + \\ &+ B\cos x \end{aligned}$$

Behelyettesítünk:

$$\begin{aligned} y'' &= -Ax\cos x - Bx\sin x - 2A\sin x + 2B\cos x \\ y &= Ax\cos x + Bx\sin x \end{aligned}$$

Összeadva:

$$-4\cos x \equiv -2A\sin x + 2B\cos x.$$

Innen: $A = 0$, $2B = -4$, tehát $B = -2$. Vagyis

$$y_0(x) = -2x\sin x.$$

A feladat megoldása:

$$y(x) = C_1\cos x + (C_2 - 2x)\sin x.$$

4.57.

$$y(x) = \left(C_1 + C_2x - \frac{4}{3}x^3\right)e^x + Ce^{3x}.$$

4.58.

$$y(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{-4x} - \frac{11}{120}\text{sh } x - \frac{1}{120}\text{ch } x.$$

4.59. $y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} + 2e^{3x}$.

4.60.

$$y(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{15}\sin 3x - \frac{2}{15}\cos 3x.$$

4.61. $y(x) = C_1e^{4x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{5}xe^{-x}$.

4.62.

$$y(x) = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{-2x} + \frac{1}{32}e^{2x}\left(2x^2 - 3x\right) + \frac{1}{5}\cos x - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{8}x.$$

4.63.

$$y(x) = C_1e^{4x} + C_2e^{-3x} - \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{9}x + \frac{4}{27}.$$

4.64.
$$y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{6} e^{2x} - \frac{5}{17} \sin x + \frac{3}{17} \cos x.$$

4.65.
$$y(x) = C_1 + e^{-x} \left(C_2 + C_3 x\right) + x - \frac{1}{2} x^2 e^{-x}.$$

4.66.
$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + e^{-x} \left(C_3 + C_4 x\right) + \frac{1}{6} \sin x + 2e^x.$$

4.67.
$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \frac{1}{8}(2x - 3)e^x.$$

4.68.
$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^x - \frac{8}{5} e^x \left(\cos \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2}\right).$$

4.69.
$$y(x) = e^x \left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3\right) + \frac{1}{120} \left(x^5 + 5x^4\right) e^x.$$

4.70.
$$y(x) = e^{3x} \left(C_1 + C_2 x\right) + \frac{1}{x}.$$

4.71.
$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

4.72.
$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x - \frac{1}{2} \sin^2 x \cos x.$$

4.73.
$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} + \left(-5x - \frac{16}{29}\right) \cos x + \left(-2x + \frac{185}{29}\right) \sin x.$$

4.74.
$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} - \frac{1}{5}.$$

4.75.
$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{2} x \operatorname{ch} 3x = \left(C_1 + \frac{x}{2}\right) \operatorname{ch} 3x + C_2 \operatorname{sh} 3x.$$

4.76.

$$
\begin{aligned}
y(x) &= C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x} + \frac{1}{6}xe^{2x} - \frac{1}{24}e^{-2x} = \\
&= C_1\text{ch } x + C_2\text{sh } x + C_3e^{2x} + \frac{1}{6}xe^{2x} - \frac{1}{24}e^{-2x}.
\end{aligned}
$$

4.77.

$$y(x) = (1+x)e^{-\frac{3}{2}x} + 2e^{-\frac{5}{2}x}.$$

4.78.

$$y(x) = e^x(0.16\cos 3x + 0.28\sin 3x) + x^2 + 2.2x + 0.84$$

4.79.

$$y(x) = e^x + x^2.$$

4.80.

$$y(x) = e^{2x} + e^x\left(1 - x - x^2\right).$$

4.81.

$$y(x) = \frac{1}{3}\sin 2x - \frac{1}{3}\sin x - \cos x.$$

4.5. Állandó-együtthatós lineáris inhomogén DE és Laplace transzformáció

4.82. A Laplace transzformáltat jelölje $\mathcal{L}(y,s) = Y(s)$. A transzformált egyenlet:

$$s(sY(s)-1) - 1 - (sY(s)-1) = frac2s - \frac{2}{s^2}.$$

Rendezés után

$$Y(s) = \frac{s^3+2s-2}{s^3(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s-1}.$$

Az állandók meghatározásához formálisan közös nevezőre hozunk, és együttható összehasonlítással keressük a megoldást:

$$\frac{s^3+2s-2}{s^3(s-1)} \equiv \frac{As^2(s-1) + Bs(s-1) + C(s-1) + Ds^3}{s^3(s-1)}$$

$$\begin{aligned} s^3 \text{ szorzója} &: \ A + D = 1 \\ s^2 \text{ szorzója} &: \ -A + B = 0 \\ s \text{ szorzója} &: \ -B + C = 2 \\ s^0 \text{szorzója} &: \ -C = -2 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $A = B = 0; \quad C = 2; \quad D = 1.$

Így

$$Y = \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s-1}.$$

Vissza transzformálva a keresett megoldás:

$$y(x) = x^2 + e^x.$$

4.83.

$$y(x) = \left(\frac{19}{25} - \frac{x}{5}\right) e^{-x} + \frac{31}{25} e^{4x}.$$

4.84.

$$y'' - 4y' + 4y = 8 \sin 2x; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4.$$

A transzformált egyenlet, ha $L(y, s) = Y$:

$$s[sY - 2] - 4 - 4[sY - 2] + 4Y = \frac{16}{s^2 + 4}.$$

Rendezés után:

$$Y = \frac{2s^3 - 4s^2 + 8s}{(s-2)^2(s^2+4)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 4}$$

Az együttható összehasonlítás után:

$$A = 1, \quad B = 2, \quad C = 1, \quad D = 0.$$

Így:

$$Y = \frac{1}{s-2} + \frac{2}{(s-2)^2} + \frac{s}{s^2+4}.$$

Vissza transzformálva:

$$y(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} + \cos 2x$$

4.85.

$$y(x) = \frac{1}{169}\left[(179 + 286x)e^{-x} - 10 \cos 3x + 24 \sin 3x\right].$$

4.86.

$$y(x) = \left(\frac{4}{25} + \frac{4}{5}x\right) e^{-2x} - \frac{4}{25}\cos 4x - \frac{3}{25}\sin 4x.$$

4.87.

$$y(x) = (2 - x)e^x + x^3 e^x.$$

4.88.

$$y(x) = \frac{1}{28}e^{3x} - \frac{1}{12}e^{-x} + \frac{1}{21}e^{-4x}$$

4.89.

$$y(x) = \frac{1}{9}\left(e^{-4x} - e^{-x}\right) + \frac{1}{3}xe^{-x}.$$

4.90.

$$y(x) = \frac{3}{16} - \frac{x}{4} - \frac{1}{7}e^{-3x} - \frac{5}{112}e^{4x}$$