Differenciálszámítás.

Befejező rész.

2018. április 12.

Lagrange-féle középértéktétel, ismétlés

Tétel.

Legyen f $: [a, b] \to \mathbb{R}$ *differenciálható. Ekkor* $\exists \xi \epsilon (a, b)$*, melyre:*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a).$$

Átfogalmazás. Legyen $\xi = a + \theta(b - a)$, ahol $0 < \theta < 1$, és $h = b - a$. Ekkor

$$f(a + h) - f(a) = f'(a + \theta h) \cdot h.$$

Lagrange-féle középértéktétel 2 dimenzióban

Tétel.

$S \subset \mathbb{R}^2$. Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ differenciálható $(x_0, y_0) \epsilon \,\mathrm{int}\, S$ pont valamely U környezetében.

Ekkor $\forall (x_1, y_1) \epsilon U$ esetén $\exists \theta \epsilon (0, 1)$, melyre:

$$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = \mathrm{grad}\, f\,(x_\theta, y_\theta) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix},$$

ahol $\Delta x := x_1 - x_0$, $\Delta y := y_1 - y_0$ és

$$x_\theta = x_0 + \theta \cdot \Delta x, \qquad y_\theta = y_0 + \theta \cdot \Delta y.$$

Bizonyítás

$F(t) := f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$. $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ diff-ható, és

$$F(0) = f(x_0, y_0), \qquad F(1) = f(x_1, y_1).$$

A Lagrange-féle középértéktétel szerint $\exists \theta \epsilon (0,1)$, melyre

$$F(1) - F(0) = F'(\theta).$$

$$F'(t) = f'_x(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta x + f'_y(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta y.$$

Összegezzük, $x_\theta = x_0 + \theta\Delta x$ és $y_\theta = y_0 + \theta\Delta y$ jelöléssel:

$$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_\theta, y_\theta)\Delta x + f'_y(x_\theta, y_\theta)\Delta y.$$

Következmény

Tétel.

Tfh $S \subset \mathbb{R}^2$ *konvex, és* $f : S \to \mathbb{R}$ *differenciálható.*

Feltesszük, hogy minden $(x, y) \epsilon S$*-re*

$$\mathrm{grad}\, f(x, y) = (0, 0).$$

Ekkor $\exists c \epsilon \mathbb{R}$*, hogy* $f(x, y) \equiv c$*, a függvény konstans.*

Bizonyítás

$(x, y),\ (x', y')\epsilon S$ tetszőleges. Ekkor $\exists\theta\epsilon(0, 1)$

$$f(x, y) - f(x', y') = \text{grad } f(x_\theta, y_\theta)\begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}.$$

A konvexitás miatt $(x_\theta, y_\theta) = \theta \cdot (x, y) + (1 - \theta) \cdot (x', y')\epsilon S$, így

$$\text{grad } f(x_\theta, y_\theta) = (0, 0),$$

ezért $f(x, y) = f(x', y')$.

Megjegyzés. Összefüggő ÉT-re is igaz, a konvexitás nem szükséges. (*HF: Miért?*)

Taylor-formula

Feladat. Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, amely elegendően sokszor differenciálható valamely (x_0, y_0) pontban. Adjunk becslést az $f(x, y)$-ra az (x_0, y_0)-beli deriváltak felhasználásával.

Egy megoldás az érintősík:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Ez megfelel az elsőfokú Taylor-polinomnak.

Magasabb fokú Taylor polinom

Visszavezetjük a feladatot az egyváltozós esetre.

Legyen

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y), \quad \text{ahol} \quad \Delta x = x - x_0, \qquad \Delta y = y - y_0.$$

Ekkor $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ elegendően sokszor diff-ható függvény,

$$F(0) = f(x_0, y_0), \qquad F(1) = f(x, y).$$

Az F függvény $t = 0$ pont körüli Taylor-formuláját használjuk.

Magasabb fokú Taylor polinom

$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$, ahol $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$.

A deriváltak:

$$
\begin{aligned}
F'(t) &= f'_x(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta x + f'_y(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta y \\
F''(t) &= f''_{xx}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)(\Delta x)^2 + \\
&+ 2f''_{xy}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta x\Delta y + \\
&+ f''_{yy}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)(\Delta y)^2.
\end{aligned}
$$

Ha $F(t)$ n-szer differenciálható, akkor indukcióval:

$$F^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\,(\Delta x)^k(\Delta y)^{n-k}.$$

A Taylor formula szerint

$$F(1) - F(0) = F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + \ldots \frac{1}{n!}F^{(n)}(0) + L_n,$$

ahol L_n a Lagrange-féle maradéktag.

$f(x, y) - f(x_0, y_0) = F(1) - F(0)$, ezért $f(x, y) - f(x_0, y_0) =$

$$= (f'_x \cdot \Delta x + f'_y \cdot \Delta y) + \frac{1}{2}\left(f''_{xx} \cdot (\Delta x)^2 + 2f''_{xy} \cdot \Delta x \Delta y + f''_{yy} \cdot (\Delta y)^2\right) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (\Delta x)^k (\Delta y)^{n-k} \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}(x_0, y_0) + L_n.$$

Másodrendű Taylor formula

Speciálisan $n = 2$ esetén kiírjuk pontosan a tagokat:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \mathrm{grad}\, f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(\Delta x \ \Delta y) \cdot H(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + L_2,$$

ahol $H(x_0, y_0)$ a Hesse-mátrix.

Kitekintés $\mathbb{R}^n$-re

Lagrange-féle középértéktétel

Tétel.

$S \subset \mathbb{R}^n$. *Legyen* $f : S \to \mathbb{R}$ *differenciálható*

$x = (x_1, \ldots, x_n) \epsilon \operatorname{int} S$ *valamely* U *környezetében. Legyen*

$h = (h_1, \ldots, h_n)$ *olyan megváltozás, melyre* $(x + h) \epsilon U$.

Ekkor $\exists \theta \epsilon (0, 1)$, *melyre:*

$$f(x+h) - f(x) = \operatorname{grad} f(x + \theta h) \cdot h = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\xi_x) h_i,$$

ahol $\xi_x = x + \theta h$.

Megjegyzés. A fenti a képletben szereplő $\cdot$ '*pont*' vektorok skaláris szorzata.

Bizonyítás

Vezessük be az alábbi *egyváltozós* függvényt:

$$F(t) := f(x + th) = f(x_1 + th_1, \ldots, x_n + th_n).$$

$F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ folytonos és diff-ható $(0, 1)$-ben, továbbá

$F(0) = f(x)$ és $F(1) = f(x + h)$.

A Lagrange-féle középértéktétel $\implies$ $\exists \theta \epsilon (0, 1)$, melyre:

$$F(1) - F(0) = F'(\theta) \cdot 1.$$

Mivel a láncszabály alkalmazásával rögzített t-re

$$F'(t) = f'_{x_1}(x + th)\, h_1 + \ldots + f'_{x_n}(x + th)\, h_n,$$

ezért $\xi_x = x + \theta \cdot h$ jelöléssel

$$F(1) - F(0) = F'(\theta) = f'_{x_1}(\xi_x)\, h_1 + \ldots + f'_{x_n}(\xi_x)\, h_n.$$

Általános másodrendű Taylor-formula.

Tétel.

$S \subset \mathbb{R}^n$. Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ n-változós függvény kétszer differenciálható S-ben. Ekkor tetszőleges $(x+h) \epsilon S$ esetén

$$f(x+h) \approx f(x) + \mathrm{grad}\ f(x) \cdot h + h^T\ H(x)\ h,$$

ahol

$$\mathrm{grad}\ f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), , \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right),$$

$$H(x) = (H_{ij}), \quad H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

(Bizonyítás: HF)