Kétváltozós függvények

Szélsőérték számítás

2020. március

Szélsőérték

Adott $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény.

Definíció.

(x_0, y_0) **LOKÁLIS** MAXIMUM *(ill. minimum), ha*

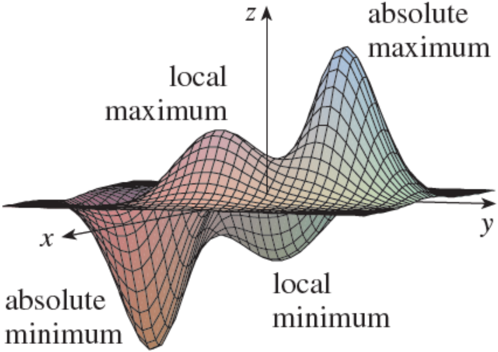
$\exists U$ *környezete a* (x_0, y_0)*-nak, hogy*

$$f(x,y) \le f(x_0,y_0) \quad (ill.\ f(x,y) \ge f(x_0,y_0)), \quad \underline{\forall (x,y) \in U}.$$

(x_0, y_0) **GLOBÁLIS** MAXIMUM *(ill. minimum), ha*

$$f(x,y) \le f(x_0,y_0) \quad (ill.\ f(x,y) \ge f(x_0,y_0)), \quad \underline{\forall (x,y) \in D}.$$

Szélsőérték, ábra



Szélsőérték létezése

Megjegyzés. Weierstrass tétel $\Longrightarrow$ ha f folytonos

és D korlátos és zárt, akkor VAN globális minimum és maximum.

Példa.

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \qquad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Globális maximumhelyek: a $\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ pontjai,

Egyetlen globális minimumhely: $(0,0)$.

Szükséges feltétel a szélsőérték létezésére

Ismétlés. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható, és $x_0 \in (a, b)$-ban *lokális szélsőértéke* van, akkor $f'(x_0) = 0$.

$\longrightarrow$ Kétváltozós függvényekre mi igaz?

Tétel. (Szükséges feltétel lokális szélsőérték létezésére)

Ha a kétváltozós f <u>differenciálható</u> függvénynek (x_0, y_0)-ban lokális szélsőértéke van, akkor

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = (0, 0).$$

Tétel (folytatás.) Más szóval,

ha (x_0, y_0) *lokális minimum vagy lokális maximum*, akkor

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0, \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{grad}\, f(x_0, y_0) = (0, 0).$$

Definíció.

Ha $\mathrm{grad}\, f(x_0, y_0) = (0, 0)$*, akkor* (x_0, y_0) STACIONÁRIUS *pont.*

(Más elnevezés: KRITIKUS *pont.)*

Következmény. Ha (x_0, y_0) lokális szélsőérték $\Rightarrow$ stacionárius pont.

$\longrightarrow$ *Visszafelé* vajon igaz-e?

Szükséges feltétel, bizonyítás

Jelölje $f_1(x) := f(x, y_0)$ az egyik metszetfüggvényt.

Tfh (x_0, y_0)-ban lokális *maximum* van. Ekkor $\exists U \subset D$:

$$f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y_0) \in U.$$

Ha $U_0 = \{x \in \mathbf{R} \;:\; (x, y_0) \in U\}$, $\quad \Longrightarrow \quad f_1(x) \leq f_1(x_0)\; \forall x \in U_0.$

Ekkor x_0 *lokális maximuma f_1-nek*,

$$\Longrightarrow \quad 0 = f_1'(x_0) = f_x'(x_0, y_0).$$

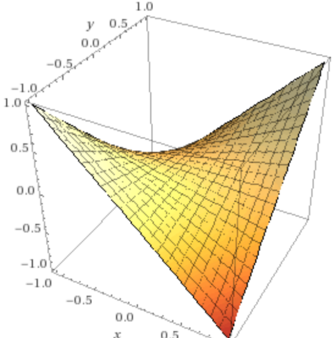
$f_y'(x_0, y_0) = 0$ hasonlóan igaz. Lokális *minimum* esetén hasonló.

Példa. $f(x,y) = xy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

A parciális deriváltjak $f'_x(x,y) = y$ és $f'_y(x,y) = x$.

$$f'_x(0,0) = 0, \quad f'_y(0,0) = 0, \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{grad} f(0,0) = (0,0).$$

Az origó stacionárius pont, mégis nem szélsőérték.



A függvényérték az origóban $f(0,0) = 0$.

1.-3. síknegyedben $f(x,y) > 0$,

2-4. síknegyedben $f(x,y) < 0$.

Példa. Milyen háromszög esetén lesz a *szögek sinusainak szorzata* maximális?

A háromszög szögei x, y, és $\pi - x - y$. Így minimalizálandó:

$$f(x,y) = \sin(x)\sin(y)\sin(\pi - x - y) = \sin(x)\sin(y)\sin(x+y),$$

ahol $f : [0,\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$. A maximum létezik. $\surd$

Ha $0 < x,\ y < \pi$, akkor $f(x,y) > 0$, egyébként $f(x,y) = 0$.

A függvény maximuma belső pontban van.

$$f(x,y) = \sin(x)\sin(y)\sin(x+y)$$

A stacionárius pontok:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \cos x \sin y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y) = 0, \quad (1) \\ f'_y(x,y) &= \sin x \cos y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y) = 0. \quad (2) \end{aligned}$$

Mivel $\sin x \neq 0$, $\sin y \neq 0$, ezekkel egyszerűsítünk.

Kis számolás (*most, otthon!*) $\implies$ $\tan y = \tan x$ $\implies$ $x = y$.

Ezt visszahelyettesítve: $\cos x \sin 2x + \sin x \cos 2x = 0$, így $\sin 3x = 0$.

$\longrightarrow$ Ezért $x = y = \dfrac{\pi}{3}$, a háromszög egyenlő oldalú. (Valóban MAX?)

Nyereg pont

Definíció.

Azt az (x_0, y_0) stacionárius pontot, ahol nincs szélsőérték,

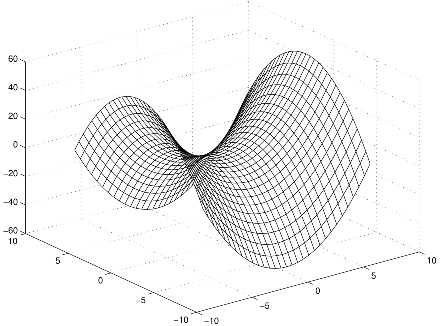
NYEREGPONT*-nak nevezzük.*

Példa. $f(x, y) = x^2 - y^2$,

$(x_0, y_0) = (0, 0)$.

A megfelelő felület egy

darabja:



Stacionárius pont. Hogyan tovább?

1. *Példa.* $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 6x + 8y + 12$. Stacionárius pontok?

$$2x - 6 = 0, \quad 8y + 8 = 0, \quad \Longrightarrow \quad x_0 = 3, \quad y_0 = -1.$$

Lok. minimum, vagy maximum, vagy egyik sem? MINIMUM.

(Szerencsénk van... Miért?)

2.*Példa.* $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$. A stacionárius pontok?

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 2x + y + 1 = 0, \\ f'_y(x,y) &= x + 2y + 1 = 0, \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad (x_0, y_0) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \qquad ???$$

Ismétlés, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Tétel. (Lokális szélsőérték, elégséges feltétel)

Tfh. f kétszer differenciálható. Tegyük fel, hogy $f'(x_0) = 0$.

Akkor $f''(x_0) \neq 0$ *esetén* x_0*-ban VAN lok. szélsőérték.*

$\dashrightarrow$ *ha* $f''(x_0) > 0$, *akkor* x_0 ***lokális minimum,***

$\dashrightarrow$ *ha* $f''(x_0) < 0$, *akkor* x_0 ***lokális maximum,***

$\dashrightarrow$ *ha* $f''(x_0) = 0$, *akkor* ***nem eldönthető****, vajon van-e szélsőérték.*

Kétváltozóban vajon mit jelent, hogy

$\longrightarrow$ "a második derivált poziív ill. negatív"?

f *kétváltozós* függvény.

Tétel. (Elégséges feltétel lokális szélsőérték létezésére.)

Tfh. f kétszer differenciálható D-ben. (x_0, y_0) belső pont.

Tfh $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = (0, 0)$ *(stacionárius pont).*

Hesse mátrixa az adott pontban $H_0 = H(x_0, y_0)$*:*

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{yx}(x_0, y_0) \\ \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Ekkor ha $\det H_0 > 0$*, akkor* (x_0, y_0)*-ban* VAN *lokális szélsőérték.*

Ekkor ha $\det H_0 < 0$*, akkor* (x_0, y_0)*-ban* NINCS *lokális szélsőérték.*

Tétel (folytatás.) A H_0 Hesse mátrix determinánsa:

$$D_0 := \det(H_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy})^2(x_0, y_0).$$

Ekkor

- Ha $D_0 > 0$, akkor a pontban lokális szélsőérték VAN.
  - Ha emellett $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, akkor lokális MINIMUM,
  - ha $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, akkor lokális MAXIMUM.
  - Mit mondhatunk, ha $f''_{xx}(x_0, y_0) = 0$?
- Ha $D_0 < 0$, akkor nincs szélsőérték.
- Ha $D_0 = 0$, akkor további vizsgálat szükséges.

Kiegészítés. $D_0 > 0$ esetben lokális szélsőérték VAN.

Ennek típusát eldönthetjük így is:

- Ha $f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$, akkor lokális MINIMUM,
- ha $f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$, akkor lokális MAXIMUM.

Tehát pozitív determináns esetén

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{yx}(x_0, y_0) \\ \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

"bal felső" vagy "jobb alsó" bármelyike dönt: *minimum* vagy *maximum*.

2. *Példa.* (folyt.) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$. A stacionárius pontok:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 2x + y + 1 = 0, \\ f'_y(x,y) &= x + 2y + 1 = 0, \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad (x_0, y_0) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

A második deriváltak konstansok:

$$f''_{xx}(x,y) = 2, \qquad f''_{yy}(x,y) = 2, \qquad f''_{xy}(x,y) = 1.$$

A Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \det H = 3 > 0,$$

ezért a stacionárius pont lokális minimum.

3. *Példa.* $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Stacionárius pontok?

$$\left.\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 0 = 2x - 3y, \\ f'_y(x,y) &= 0 = -3x + 2y, \end{aligned}\right. \quad \Longrightarrow \quad (x_0, y_0) = (0,0).$$

(Tipp?) A Hesse mátrix:

$$H = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{yx}(x,y) \\ \\ f''_{xy}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\det\ H = -5 < 0.$

3. *Példa.* (folyt.) $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$

$\longrightarrow$ A függvénynek nincs lokális szélsőértéke.