Abszolút szélsőérték

2020. ápilis

Egyváltozós függvény, ismétlés

$f : [a, b] \to \mathbf{R}$ differenciálható. Abszolút (globális) szélsőérték?

$$\min_{a \le x \le b} f(x) = f(\xi_1) = ? \qquad \max_{a \le x \le b} f(x) = f(\xi_2) = ?$$

(VAN minimum és maximum!)

Ezek a szélsőérték ”jelöltek”:

1. $x_0 \in (a, b)$, ahol $f'(x_0) = 0$ —- belső pontok.
2. $f(a)$ és $f(b)$.

Befejező lépés: A ”jelöltek” összehasonlítása.

$$\min / \max\{f(x_0), f(a), f(b)\} = ?$$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$S \subset \mathbb{R}^2$ korlátos, zárt tartomány. $f : S \to \mathbb{R}$ diff-ható S belsejében.

Abszolút (globális) szélsőérték?

$\min\limits_{(x,y)\in S} f(x,y) = f(\xi_1, \eta_1) =?$ $\max\limits_{(x,y)\in S} f(x,y) = f(\xi_2, \eta_2) =?$ ($\exists$ min./ max)

Ezek a szélsőérték "jelöltek":

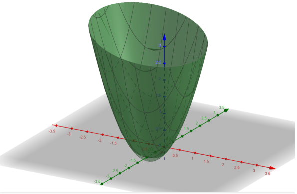
1. $(x_0, y_0) \in \operatorname{int} S$, ahol $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$. Belső pontok, lokális szélsőérték jelöltek.
2. $f(x,y)$, ha $(x,y) \in \partial S$. Ez túl sok pont!

Helyette $f\big|_{\partial S}$: Feltételes szélsőérték?

Példa. Abszolút szélsőértéket keresünk.

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y.$$

$$S = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$



Stacionárius pontok a TARTOMÁNY BELSEJÉBEN?

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 2x + y + 1 = 0, \\ f'_y(x, y) &= x + 2y + 1 = 0, \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad P_0(x_0, y_0) = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$$

A Hesse mátrix $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} > 0$, ezért P_0 lokális minimum.

Feltételes szélsőérték a HATÁRON: $\min\limits_{x^2+y^2=1} x^2+xy+y^2+x+y=?$

Lagrange multiplikátor szabállyal, legyen:

$$F(x,y,\lambda)=x^2+xy+y^2+x+y-\lambda(x^2+y^2-1),$$

A Lagrange függvény stacionárius pontjai:

$$\begin{aligned}
F'_x(x,y,\lambda) &= 2x+y+1-2\lambda x=0,\\
F'_y(x,y,\lambda) &= x+2y+1-2\lambda y=0,\\
F'_\lambda(x,y,\lambda) &= -(x^2+y^2-1)=0
\end{aligned}$$

A λ-t tartalmazó tagokat ki akarjuk ejteni. Ezért:

$$xF'_y-yF'_x=x(x+2y+1-2\lambda y)-y(2x+y+1-2\lambda x)=0.$$

Kis átrendezéssel: $x^2+x=y^2+y \implies (y-x)(y+x+1)=0.$

Az előző oldalról: $(y-x)(y+x+1)=0$. Feltétel: $x^2+y^2=1$.

1.) $x=y$ esetén két megoldás van:

$P_1(x_1,y_1)=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ és $P_2(x_2,y_2)=(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$.

2.) $x=-y-1$ esetén is két megoldás van:

$P_3(x_3,y_3)=(0,-1)$ és $P_4(x_4,y_4)=(-1,0)$.

Végül összehasonlítás:

$$f(P_0)=-\frac{1}{3},\quad f(P_1)=\frac{3}{2}+\sqrt{2},\quad f(P_2)=\frac{3}{2}-\sqrt{2},\quad f(P_3)=f(P_4)=1.$$

A minimum $f(P_0)=-1/3$, a maximum $f(P_1)\approx 2.91$.