Kétváltozós függvények szélsőértékszámítása. 3. rész

2018. április 9.

Abszolút szélsőérték

Egyváltozós függvény, ismétlés

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható. Abszolút (globális) szélsőérték?

$$\min_{a \le x \le b} f(x) = f(\xi_1) =? \qquad \max_{a \le x \le b} f(x) = f(\xi_2) =?$$

(VAN minimum és maximum!)

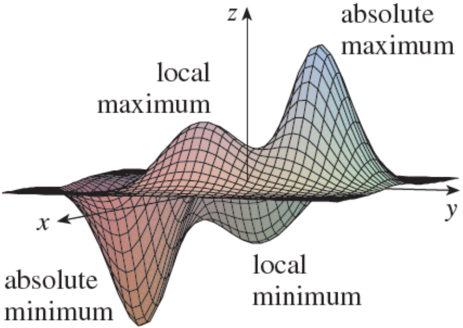
Ezek a szélsőérték "jelöltek":

1. $x_0 \epsilon (a, b)$, ahol $f'(x_0) = 0$ —- belső pontok.
2. $f(a)$ és $f(b)$.

Befejező lépés: A "jelöltek" összehasonlítása.

$$\min / \max\{f(x_0), f(a), f(b)\} =?$$

Szélsőérték, ábra



$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$S \subset \mathbb{R}^2$ korlátos, zárt tartomány. $f : S \to \mathbb{R}$ folytonos, diff-ható S belsejében. Abszolút (globális) szélsőérték?

$$\min_{(x,y)\epsilon S} f(x,y) = f(\xi_1, \eta_1) = ? \qquad \max_{(x,y)\epsilon S} f(x,y) = f(\xi_2, \eta_2) = ?$$

(VAN minimum és maximum!)

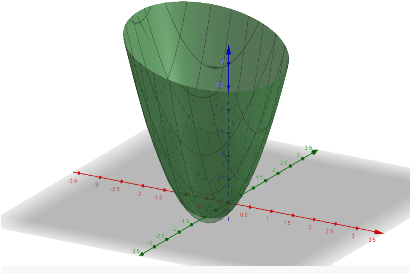
Ezek a szélsőérték "jelöltek":

1. $(x_0, y_0) \epsilon \operatorname{int} S$, ahol $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$. Belső pontok, lokális szélsőérték jelöltek.
2. $f(x, y)$, ha $(x, y) \epsilon \partial S$ Ez túl sok pont!

Helyette $f\big|_{\partial S}$: Feltételes szélsőérték?

Példa. Abszolút szélsőértéket keresünk.

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$. $S = \{(x,y) \; : \; x^2 + y^2 \leq 1\}$.



Stacionárius pontok a TARTOMÁNY BELSEJÉBEN?

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 2x + y + 1 = 0, \\ f'_y(x,y) &= x + 2y + 1 = 0, \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad P_0(x_0, y_0) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

A Hesse mátrix $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} > 0$, ezért P_0 lokális minimum.

Feltételes szélsőérték a TARTOMÁNY HATÁRÁN?

$$\min_{x^2+y^2=1} x^2 + xy + y^2 + x + y = ?$$

Lagrange multiplikátor szabállyal, legyen :

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + xy + y^2 + x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

A Lagrange függvény stacionárius pontjai:

$$\begin{aligned} F'_x(x, y, \lambda) &= 2x + y + 1 - 2\lambda x = 0, \\ F'_y(x, y, \lambda) &= x + 2y + 1 - 2\lambda y = 0, \end{aligned}$$

$$x(x + 2y + 1 - 2\lambda y) - y(2x + y + 1 - 2\lambda x) = 0.$$

$$y^2 + y = x^2 + x \quad \Longrightarrow \quad (y - x)(y + x + 1) = 0.$$

$$\min_{x^2+y^2=1} x^2+xy+y^2+x+y=?$$

$$y^2+y=x^2+x \quad \Longrightarrow \quad (y-x)(y+x+1)=0.$$

1.) $x=y$ esetén két megoldás van:

$P_1(x_1,y_1)=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ és $P_2(x_2,y_2)=(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$.

2.) $x=-y-1$ esetén is két megoldás van:

$P_3(x_3,y_3)=(0,-1)$ és $P_4(x_4,y_4)=(-1,0)$.

Végül összehasonlítás:

$$f(P_0)=\frac{1}{3},\quad f(P_1)=\frac{3}{2}+\sqrt{2},\quad f(P_2)=\frac{3}{2}-\sqrt{2},\quad f(P_3)=f(P_4)=1.$$

A minimum $f(P_0)=-1/3$, a maximum $f(P_1)\approx 2.91$.