



*Matematikai Analízis II. Távoktatás. 2. hét/2.*

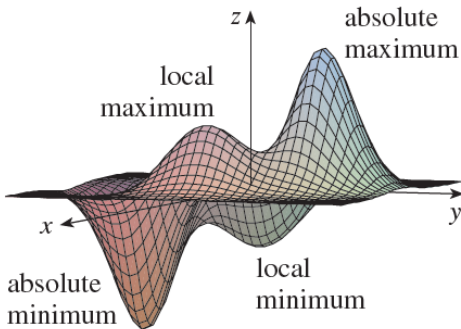
# Kétváltozós függvények

## Szélsőérték számítás. II. rész

2020. április



## Szélsőérték, ábra





## Szükséges feltétel szélsőérték létezésére, ism.

### Tétel.

Tfh az  $f$  függvénynek  $(x_0, y_0)$ -ban *lokális szélsőértéke* van, és  $f$  *differenciálható*. Ekkor

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = (0, 0),$$

azaz  $f'_x(x_0, y_0) = 0$ ,  $f'_y(x_0, y_0) = 0$ .

Ha  $\text{grad } f(x_0, y_0) = (0, 0)$ , akkor  $(x_0, y_0)$  STACIONÁRIUS pont.

Az a stacionárius pont, ahol nincs szélsőérték, NYEREGPONT.



*Matematikai Analízis II. Távoktatás. 2. hét/2.*

**Tétel.** (Elégséges feltétel a szélsőérték létezésére.)

$f$  kétszer differenciálható. Tfh  $(x_0, y_0)$  *stacionárius pont*. Hesse mátrixa  $H_0 := H(x_0, y_0)$ , ennek determinánsa

$$D_0 := \det(H_0) = f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2.$$

Ekkor  $D_0 > 0$  esetén a pontban *lokális szélsőérték van*.

→ Ha emellett  $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ , akkor *lokális MINIMUM*,

→ ha  $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ , akkor *lokális MAXIMUM*.

Továbbá  $D_0 < 0$  esetén *nincs szélsőérték*.

Továbbá  $D_0 = 0$  esetén ez alapján *nem eldönthető*.



## Szélsőérték

Tétel. (Szélsőérték létezésének szükséges feltétele)

$f : S \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $S \subset \mathbf{R}^n$ , a függvény differenciálható. Tfh  $x_0 \in \text{int } S$ -ban lokális szélsőértéke van. Ekkor

$$\text{grad } f(x_0) = 0 (\in \mathbf{R}^n).$$

(Elnevezés:  $x_0$  STACIONÁRIUS pont.)

Más szóval:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$



## Emlékeztető

### Definíció.

Az  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  *szimmetrikus* mátrix

- ▶ POZITÍV DEFINIT, ha  $\forall x \in \mathbf{R}^n, x \neq 0$  esetén  $x^T A x > 0$ .  $A > 0$ ,
- ▶ NEGATÍV DEFINIT, ha  $\forall x \in \mathbf{R}^n, x \neq 0$  esetén  $x^T A x < 0$ .  $A < 0$ .
- ▶ INDEFINIT, ha  $\exists x \in \mathbf{R}^n: x^T A x > 0$  és  $\exists y \in \mathbf{R}^n: y^T A y < 0$ .
- ▶ POZITÍV SZEMIDEFINIT ( $A \geq 0$ ), ill. NEGATÍV SZEMIDEFINIT ( $A \leq 0$ ), ha  $\forall x$ -re  $x^T A x \geq 0$  ill.  $x^T A x \leq 0$



## Szélsőérték

Tétel. (Szélsőérték létezésének elégséges feltétele)

$S \subset \mathbf{R}^n$ ,  $f : S \rightarrow \mathbf{R}$  kétszer differenciálható függvény.

$x_0 \in \text{int}(S)$  belső pont. Tfh  $\text{grad } f(x_0) = 0$ .

A Hesse mátrix  $H$ , melyre  $H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$ .

1. Ha  $H > 0$ , akkor  $x_0$  lokális *minimum*.
2. Ha  $H < 0$ , akkor  $x_0$  lokális *maximum*.
3. Ha  $H$  indefinit, akkor *nincs szélsőérték*.
4. Ha  $H$  szemidefinit, akkor *további vizsgálat* szükséges.



## Speciálisan: kétváltozós függvény

Tétel. (Elégséges feltétel a szélsőérték létezésére.)

$f$  kétszer differenciálható. Tfh  $\text{grad } f(x_0, y_0) = (0, 0)$ . Hesse mátrixa

$H_0 := H(x_0, y_0)$ . Ekkor

- ▶ ha  $H_0$  pozitív definit, akkor  $(x_0, y_0)$  lokális minimum,
- ▶ ha  $H_0$  negatív definit, akkor lokális maximum,
- ▶ ha  $H_0$  indefinit, akkor nincs szélsőértéke,
- ▶ ha  $H_0$  szemidefinit, akkor lehet van, és lehet hogy nincs lokális szélsőértéke.





## Definit mátrixok

Példaként tekintsük az alábbi mátrixokat

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- ▶  $A > 0$  (pozitív definit),
- ▶  $B < 0$  (negatív definit)
- ▶  $C$  indefinit.



## Emlékeztető Lineáris Algebrából.

Adott  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  szimmetrikus mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

1. Ekkor  $A > 0$  ekvivalens azzal, hogy  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ .

Továbbá  $A > 0 \iff ac - b^2 > 0$ , és  $a > 0$  ( $c > 0$ ).

2. Ekkor  $A < 0$  ekvivalens azzal, hogy  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ .

Továbbá  $A < 0 \iff ac - b^2 > 0$ , és  $a < 0$  ( $c < 0$ ).



## Definit mátrixok $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ -ben.

**Állítás.** Legyen  $H_0$  az  $f$  függvény Hesse mátrixa  $(x_0, y_0)$ -ban:

$$H_0 = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{yx}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}. \quad \text{Ekkor}$$

1.  $H_0 > 0 \iff \det(H_0) > 0$  és  $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$
2.  $H_0 < 0 \iff \det(H_0) > 0$  és  $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$
3.  $H_0$  indefinit  $\iff \det(H_0) < 0$
4.  $H_0 \leq 0$  vagy  $H_0 \geq 0 \iff \det(H_0) = 0$

*Megjegyzés.* Az 1. és 2. pontban  $f''_{yy}(x_0, y_0)$  is írható.



## Emlékeztető Lineáris Algebrából. *Figyelem!*

Adott  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  szimmetrikus mátrix:

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}, \quad a_{i,j} = a_{j,i}.$$

1. Ekkor  $A > 0$  ekvivalens azzal, hogy  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$ .

Továbbá  $A > 0$  **NEM ekvivalens azzal, hogy  $\det(A) > 0$  !**

2. Ekkor  $A < 0$  ekvivalens azzal, hogy  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n < 0$ .

3. Ekkor  $A \geq 0$  ekvivalens azzal, hogy  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$ .



## Minta feladat

Adott  $\mathbb{R}^2$ -ben egy  $g(x, y) = 0$  görbe. Melyik pontja van az origóhoz a legközelebb?

$$\min(x^2 + y^2) =? \quad \text{ha} \quad g(x, y) = 0.$$

"Megoldás":  $g(x, y) = 0$  alakból az egyik változó:  $y = F(x)$ , és

$$\min [x^2 + F^2(x)] =? \quad x \in D_F$$

Hátránya:

- ▶ nem biztos, hogy *explicit* megoldást létezik, ill. ismerjük azt.
- ▶ önkényesen részesítjük előnyben az egyik változót.



## Feltételes szélsőérték

Megoldás: közvetlen optimalizálás.

Legyen  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , és

$$R = \{(x, y) : g(x, y) = 0\} \subset \mathbf{R}^2.$$

Az  $f|_R$  megszorítását tekintjük, és itt keressük a szélsőértékét.

Nehézség:  $\text{int}(R) = \emptyset$

$\implies$  az eddigi tételeket nem alkalmazhatjuk.

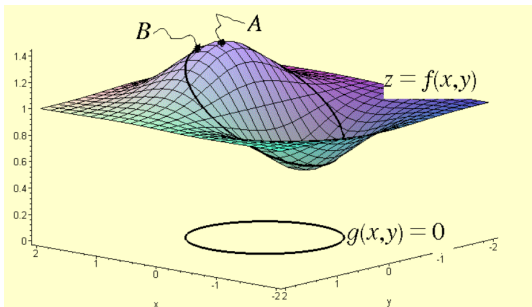


*Matematikai Analízis II. Távoktatás. 2. hét/2.*

## Feltételes optimalizálás feladata

Adottak  $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$  függvények.  $f$  minimumát keressük az  $R = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$  halmazon.

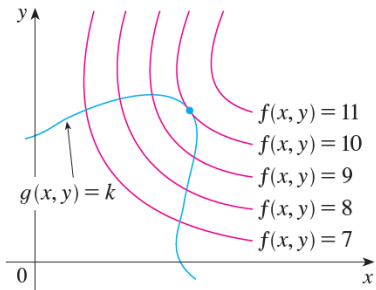
$$\min_{\{g(x,y)=0\}} f(x,y) = ?$$





*Matematikai Analízis II. Távoktatás. 2. hét/2.*

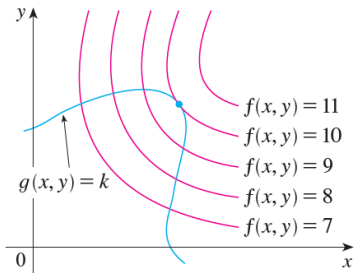
$$\min_{\{g(x,y)=k\}} f(x,y) = ?$$







## Matematikai Analízis II. Távoktatás. 2. hét/2.



Melyik szintvonal metszi "utoljára" a  $g(x, y) = k$  görbét? Ott az érintők megegyeznek, azaz

$$\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = \frac{g'_x(x, y)}{g'_y(x, y)}.$$

$$\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = \frac{g'_x(x, y)}{g'_y(x, y)} \iff \frac{f'_x(x, y)}{g'_x(x, y)} = \frac{f'_y(x, y)}{g'_y(x, y)} = \lambda.$$

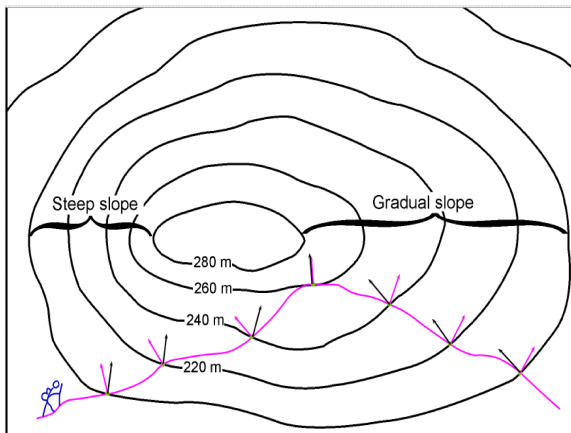
Szemléletesen, ha  $(x, y)$  feltételes szélsőérték, akkor  $\exists \lambda$ :

$$f'_x(x, y) - \lambda g'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) - \lambda g'_y(x, y) = 0$$



*Matematikai Analízis II. Távoktatás. 2. hét/2.*

Kicsit másképp:





## Feltételes szélsőérték, szükséges feltétel

$$\min_{\{(x,y): \phi(x,y)=0\}} f(x,y) = ?$$

Tétel.

- ▶ Tfh a differenciálható  $f$  függvénynek az  $(x_0, y_0)$  pontban feltételes szélsőértéke van a  $\phi(x, y) = 0$  feltétel mellett.
- ▶ Tfh  $\text{grad } \phi(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ .

Ekkor  $\exists \lambda_0 \in \mathbf{R}$ , melyre

$$f'_x(x_0, y_0) - \lambda_0 \phi'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) - \lambda_0 \phi'_y(x_0, y_0) = 0.$$



## Lagrange-féle multiplikátor szabály

$$f'_x(x_0, y_0) - \lambda_0 \phi'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) - \lambda_0 \phi'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Definiáljuk az  $F : D_f \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  háromváltozós függvényt:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \phi(x, y).$$

*Feltételes* optimalizálási feladat:

$$\min_{\{\phi(x,y)=0\}} f(x, y)? \quad \text{vagy} \quad \max_{\{\phi(x,y)=0\}} f(x, y)?$$

→ helyette  $F$  függvény *feltétel nélküli* szélsőérték-feladata:

$$\text{grad } F(x, y, \lambda) = (0, 0, 0).$$



## Lagrange-féle multiplikátor szabály

### Tétel.

→ Tfh a differenciálható  $f$  függvénynek az  $(x_0, y_0)$  pontban feltételes szélsőértéke van a  $\phi(x, y) = 0$  feltétel mellett.

→ Tfh  $\text{grad } \phi(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ .

Ekkor  $\exists \lambda_0 \in \mathbf{R}$ , melyre  $(x_0, y_0, \lambda_0)$  stacionárius pontja az

$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\phi(x, y)$  függvénynek:

$$\text{grad } F(x_0, y_0, \lambda_0) = (0, 0, 0).$$

Megjegyzés. Csak szükséges feltétel! További meggondolás kell.



## Példa

$f(x, y) = xy$  feltételes szélsőértékeit keressük az  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  görbe mentén. Létezik minimum és maximum.

Előzetes becslés a feltételi halmazon:

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2 y^2} = |xy| \quad \implies \quad |f(x, y)| \leq \frac{1}{2}.$$

A Lagrange függvény:

$$F(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$



*Matematikai Analízis II. Távoktatás. 2. hét/2.*

$F(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$  stacionárius pontjai:

$$F'_x(x, y, \lambda) = y - 2\lambda x = 0, \quad (1)$$

$$F'_y(x, y, \lambda) = x - 2\lambda y = 0, \quad (2)$$

$$F'_\lambda(x, y, \lambda) = -(x^2 + y^2 - 1) = 0. \quad (3)$$

(1) és (2)-ből:  $\lambda = \frac{y}{2x}, \quad \lambda = \frac{x}{2y} \implies x^2 = y^2 \implies x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$

Négy stacionárius pontot kapunk:

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad (x_2, y_2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

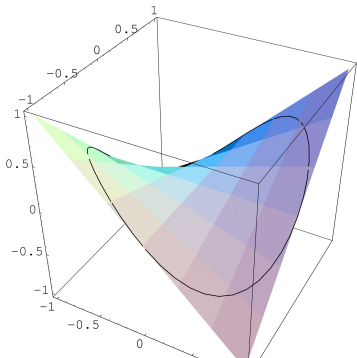
$$(x_3, y_3) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad (x_4, y_4) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$



*Matematikai Analízis II. Távoktatás. 2. hét/2.*

A stacionárius pontok:  $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$ , a függvényértékek:

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = \frac{1}{2}, \quad f(x_3, y_3) = f(x_4, y_4) = -\frac{1}{2}.$$



Mivel  $|f(x, y)| \leq \frac{1}{2}$ ,



$f(x_1, y_1), f(x_2, y_2)$ : max,

$f(x_3, y_3)$  és  $f(x_4, y_4)$ : min.