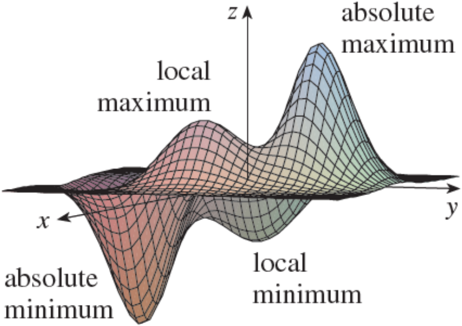
Kétváltozós függvények szélsőértéke 2. rész

2018. március 22.

Szélsőérték, ábra



Szükséges feltétel a szélsőérték létezésére, ismétlés

Tétel.

Tfh az f függvénynek (x_0, y_0)-ban lokális szélsőértéke van, és f differenciálható. Ekkor

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = (0, 0),$$

azaz $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Definíció.

Ha $\text{grad } f(x_0, y_0) = (0, 0)$, akkor (x_0, y_0) STACIONÁRIUS *(vagy kritikus) pont. Azt az (x_0, y_0) stacionárius pontot, ahol nincs szélsőérték,* NYEREGPONT*-nak nevezzük.*

Ismétlés, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Tétel. (Lokális szélsőérték, elégséges feltétel)

f kétszer differenciálható.

Tegyük fel, hogy $f'(x_0) = 0$ (stacionárius pont), akkor:

⇢ *ha $f''(x_0) > 0$, akkor x_0* ***lokális minimum****,*

⇢ *ha $f''(x_0) < 0$, akkor x_0* ***lokális maximum****,*

⇢ *ha $f''(x_0) = 0$, akkor* ***nem eldönthető****, vajon van-e szélsőérték.*

f kétváltozós függvény

Tétel. (Elégséges feltétel a szélsőérték létezésére.)

f kétszer differenciálható.

Tfh $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = (0, 0)$ *(stacionárius pont). Hesse mátrixa* $H_0 := H(x_0, y_0)$*. Ekkor*

- *ha H_0 pozitív definit, akkor (x_0, y_0) lokális minimum,*
- *ha H_0 negatív definit, akkor lokális maximum,*
- *ha H_0 indefinit, akkor nincs szélsőértéke,*
- *ha H_0 szemidefinit, akkor lehet, hogy lokális szélsőértéke van, és lehet, hogy nincs.*

A Tételt nem bizonyítjuk.

Definit mátrixok

Példaként tekintsük az alábbi mátrixokat

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

.

- $A > 0$ (pozitív definit),
- $B < 0$ (negatív definit)
- C indefinit.

Definit mátrixok $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben.

Állítás. Legyen H_0 az f függvény Hesse mátrixa (x_0, y_0)-ban:

$$H_0 = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{yx}(x_0, y_0) \\ \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Ekkor

1. $H_0 > 0 \iff \det(H_0) > 0$ és $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$
2. $H_0 < 0 \iff \det(H_0) > 0$ és $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$
3. H_0 indefinit $\iff \det(H_0) < 0$
4. $H_0 \leq 0$ vagy $H_0 \geq 0 \iff \det(H_0) = 0$

Megjegyzés. Az 1. és 2. pontban $f''_{yy}(x_0, y_0)$ is írható.

Tétel. (Elégséges feltétel a szélsőérték létezésére.)

f kétszer differenciálható. Tfh (x_0, y_0) stacionárius pont. Hesse mátrixa $H_0 := H(x_0, y_0)$, ennek determinánsa

$$D_0 := \det(H_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2.$$

Ekkor

- *Ha $D_0 > 0$, akkor a pontban lokális szélsőérték van.*
  - *Ha emellett $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, akkor lokális* MINIMUM,
  - *ha $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, akkor lokális* MAXIMUM.
- *Ha $D_0 < 0$, akkor nincs szélsőérték.*
- *Ha $D_0 = 0$, akkor további vizsgálat szükséges.*

Példa

$f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Stacionárius pontok?

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 0 = 2x - 3y, \\ f'_y(x,y) &= 0 = -3x + 2y, \end{aligned} \implies (x_0, y_0) = (0,0).$$

A Hesse mátrix:

$$H = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{yx}(x,y) \\ \\ f''_{xy}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\det H = -5 < 0$, a mátrix indefinit. A függvénynek nincs lokális szélsőértéke.

Példa

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$. A stacionárius pontok?

$$\left.\begin{array}{rcl} f'_x(x,y) & = & 2x + y + 1 = 0, \\ f'_y(x,y) & = & x + 2y + 1 = 0, \end{array}\right. \implies (x_0, y_0) = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$$

A második deriváltak konstansok:

$$f''_{xx}(x,y) = 2, \qquad f''_{yy}(x,y) = 2, \qquad f''_{xy}(x,y) = 1.$$

A Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} > 0,$$

ezért a stacionárius pont lokális minimum.

Feltételes szélsőérték

Minta feladat: Adott $\mathbb{R}^2$-ben egy $g(x, y) = 0$ görbe. Melyik pontja van az origóhoz a legközelebb?

$$\min(x^2 + y^2) =? \quad \text{ha} \quad g(x, y) = 0.$$

Megoldás: $g(x, y) = 0$ alakból az egyik változó: $y = F(x)$, és

$$\min \left[x^2 + F^2(x) \right] =? \qquad x \epsilon D_F$$

Hátránya:

- nem biztos, hogy explicit megoldás létezik,
- önkényesen részesítjük előnyben az egyik változót.

Feltételes szélsőérték

2. megoldás: közvetlen optimalizálás.

Legyen $f(x,y) = x^2 + y^2$, és

$$R = \{(x,y) : \; g(x,y) = 0\}.$$

Az $f\big|_R$ megszorítását tekintjük , és itt keressük a szélsőértékét.

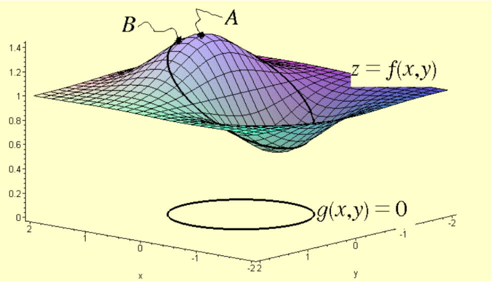
Nehézség: $\mathrm{int}\,(R) = \emptyset$

$\Longrightarrow$ az eddigi tételeket nem alkalmazhatjuk.

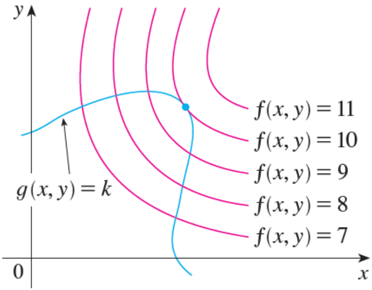
Feltételes optimalizálás feladata

Adottak $f, g : S \to \mathbb{R}$ függvények. f minimumát keressük az $\{(x, y) \ : \ g(x, y) = 0\}$ halmazon.

$$\boxed{\min_{\{g(x,y)=0\}} f(x, y) = ?}$$



$$\boxed{\min_{\{g(x,y)=k\}} f(x,y) = ?}$$



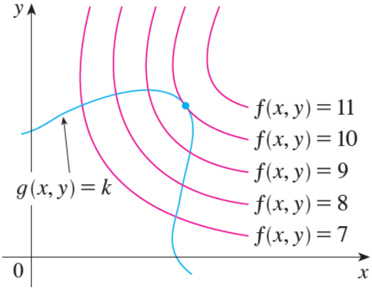
Melyik szintvonal metszi ”utoljára” a $g(x,y) = k$ görbét? Ott az érintők megegyeznek, azaz

$$\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} = \frac{g'_x(x,y)}{g'_y(x,y)}.$$

$$\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} = \frac{g'_x(x,y)}{g'_y(x,y)} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f'_x(x,y)}{g'_x(x,y)} = \frac{f'_y(x,y)}{g'_y(x,y)} = \lambda.$$

Szemléletesen, ha (x, y) feltételes szélsőérték, akkor $\exists\lambda$:

$$f'_x(x,y) - \lambda g'_x(x,y) = 0, \qquad f'_y(x,y) - \lambda g'_y(x,y) = 0$$



Feltételes szélsőérték, szükséges feltétel

$$\boxed{\min_{\{(x,y):\ \phi(x,y)=0\}} f(x,y) = ?}$$

Tétel.

- *Tfh a differenciálható f függvénynek az* (x_0, y_0) *pontban* *<u>feltételes szélsőértéke</u> van a* $\phi(x,y) = 0$ *feltétel mellett.*
- *Tfh* $\operatorname{grad} \phi(x_0, y_0) \neq (0,0)$.

Ekkor $\exists \lambda_0 \epsilon \mathbb{R}$*, melyre*

$$f'_x(x_0, y_0) - \lambda_0 \phi'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) - \lambda_0 \phi'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Lagrange-féle multiplikátor szabály

$$f'_x(x_0, y_0) - \lambda_0 \phi'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) - \lambda_0 \phi'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Definiáljuk az $F : D_f \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ háromváltozós függvényt:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \phi(x, y).$$

Feltételes optimalizálási feladat:

$$\min_{\{\phi(x,y)=0\}} f(x, y) \qquad \text{vagy} \qquad \max_{\{\phi(x,y)=0\}} f(x, y)$$

–> helyette F függvény *feltétel nélküli* szélsőérték feladata:

$$\text{grad } F(x, y, \lambda) = (0, 0, 0).$$

Lagrange-féle multiplikátor szabály

Tétel.

- *Tfh a differenciálható f függvénynek az* (x_0, y_0) *pontban feltételes szélsőértéke van a* $\phi(x, y) = 0$ *feltétel mellett.*
- *Tfh* $\mathrm{grad}\ \phi(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

Ekkor $\exists \lambda_0 \epsilon \mathbb{R}$, *melyre* (x_0, y_0, λ_0) *stacionárius pontja* $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\phi(x, y)$ *-nek:*

$$\mathrm{grad}\ F(x_0, y_0, \lambda_0) = (0, 0, 0).$$

Megjegyzés. Csak *szükséges* feltétel! További meggondolás szükséges.

Példa

$f(x, y) = xy$ feltételes szélsőértékeit keressük az

$x^2 + y^2 - 1 = 0$ görbe mentén. Létezik minimum és maximum.

Előzetes becslés a feltételi halmazon:

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2 y^2} = |xy| \qquad \Longrightarrow \quad |f(x, y)| \leq \frac{1}{2}.$$

A Lagrange függvény:

$$F(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

$F(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ stacionárius pontjai:

$$\begin{aligned} F'_x(x, y, \lambda) &= y - 2\lambda x = 0, & (1) \\ F'_y(x, y, \lambda) &= x - 2\lambda y = 0, & (2) \\ F'_\lambda(x, y, \lambda) &= -(x^2 + y^2 - 1) = 0. & (3) \end{aligned}$$

(1) és (2)-ból:

$$\lambda = \frac{y}{2x}, \quad \lambda = \frac{x}{2y} \implies x^2 = y^2 \implies x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$$

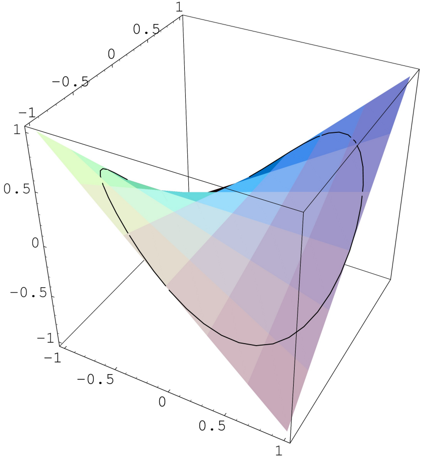
Négy stacionárius pontot kapunk:

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad (x_2, y_2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$(x_3, y_3) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad (x_4, y_4) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

A stacionárius pontok: $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$, a függvényértékek:

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = \frac{1}{2}, \quad f(x_3, y_3) = f(x_4, y_4) = -\frac{1}{2}.$$



Mivel $|f(x, y)| \le \frac{1}{2}$,

$$\Longrightarrow$$

$f(x_1, y_1)$, $f(x_2, y_2)$: max,

$f(x_3, y_3)$ és $f(x_4, y_4)$: min.

Kitekintés $\mathbb{R}^n$-re

Szélsőérték

Tétel. (Szélsőérték létezésének szükséges feltétele)

$f : S \to \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^n$ differenciálható. Tfh $x_0 \epsilon \mathrm{int}\, S$-ban lokális szélsőértéke van. Ekkor

$$\mathrm{grad}\, f(x_0) = 0(\epsilon \mathbb{R}^n).$$

(Elnevezés: x_0 STACIONÁRIUS *pont.)*

Más szóval:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots n.$$

Emlékeztető

Definíció.

Az $A \epsilon \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix

- POZITÍV DEFINIT, *ha minden $x \epsilon \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ esetén $x^T A x > 0$.*

  Jelölés $A > 0$,

- NEGATÍV DEFINIT, *ha $\forall x \epsilon \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ esetén $x^T A x < 0$.*

  Jelölés $A < 0$.

- *A mátrix* INDEFINIT, *ha $\exists x \epsilon \mathbb{R}^n$, melyre $x^T A x > 0$ és $\exists y \epsilon \mathbb{R}^n$, melyre $y^T A y < 0$.*

Szélsőérték

Tétel. (Szélsőérték létezésének elégséges feltétele)

$S \subset \mathbb{R}^n$, $f : S \to \mathbb{R}$ *kétszer differenciálható függvény.*

$x \epsilon \mathrm{int}\,(S)$ *belső pont. Tfh* $\mathrm{grad}\ f(x) = 0$.

A Hesse mátrix H , melyre $H_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$.

1. *Ha* $H > 0$, *akkor x lokális minimum.*
2. *Ha* $H < 0$, *akkor x lokális maximum.*
3. *Ha H indefinit, akkor nincs szélsőérték.*
4. *Ha H szemidefinit, akkor további vizsgálat szükséges.*