Kétváltozós függvények szélsőértéke.

2018. március 19.

Szélsőérték

$f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, $S \subset \mathbb{R}^2$.

Definíció.

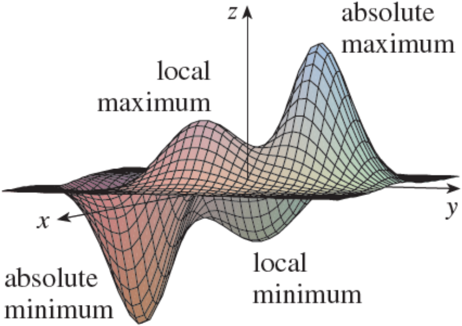
(x_0, y_0) LOKÁLIS MAXIMUM *(ill. minimum), ha* $\exists U$ *környezete a pontnak, hogy*

$$f(x,y) \leq f(x_0,y_0) \qquad (ill.\ f(x,y) \geq f(x_0,y_0)), \quad \forall (x,y) \epsilon U.$$

(x_0, y_0) GLOBÁLIS MAXIMUM *(ill. minimum), ha*

$$f(x,y) \leq f(x_0,y_0) \qquad (ill.\ f(x,y) \geq f(x_0,y_0)), \quad \forall (x,y) \epsilon D_f.$$

Szélsőérték, ábra



Szélsőérték létezése

Megjegyzés. Weierstrass tétel $\Longrightarrow$ ha ha f folytonos és S korlátos és zárt, akkor VAN globális minimum és maximum.

Példa.

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \qquad S = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}.$$

Globális maximumhelyek: a $\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ pontjai,

Egyetlen globális minimumhely: $(0,0)$.

Szükséges feltétel a szélsőérték létezésére

Tétel.

Tfh az f függvénynek (x_0, y_0)*-ban lokális szélsőértéke van, és f differenciálható. Ekkor*

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = (0, 0),$$

azaz $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Definíció.

Ha $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = (0, 0)$, *akkor* (x_0, y_0) STACIONÁRIUS *(vagy kritikus) pont.*

Szükséges feltétel, bizonyítás

Jelölje $f_1(x) := f(x, y_0)$ az egyik metszetfüggvényt.

Tfh (x_0, y_0)-ban lokális *maximum* van. Ekkor $\exists U \subset \mathbb{R}^2$:

$$f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y_0) \epsilon U \cap D_f.$$

Ha $U_0 = \{x \epsilon \mathbb{R} \ : \ (x, y_0) \epsilon U \cap D_f\}, \quad \Longrightarrow \quad f_1(x) \leq f_1(x_0) \ \forall x \epsilon U_0.$

Ekkor x_0 *lokális maximuma* f_1-nek,

$$\Longrightarrow \quad 0 = f_1'(x_0) = f_x'(x_0, y_0).$$

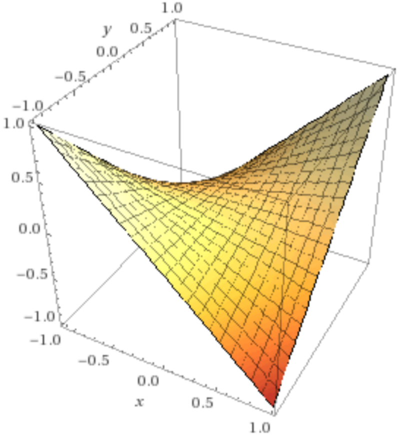
Lokális *minimum* esetén hasonló.

Példa. $f(x,y) = xy$, $(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2$.

A parciális deriváltjak $f'_x(x,y) = y$ és $f'_y(x,y) = x$.

$$f'_x(0,0) = 0, \quad f'_y(0,0) = 0, \quad \Longrightarrow \quad \text{grad } f(0,0) = (0,0).$$

Az origó stacionárius pont, mégis nem szélsőérték.



$$f(0,0) = 0$$

az 1.és 3. síknegyedben $f(x,y) > 0$,

a 2. és 4. síknegyedben $f(x,y) < 0$.

Példa

Milyen háromszög esetén lesz a szögek sinusainak szorzata maximális?

A háromszög szögei x, y, és $\pi - x - y$. Így minimalizálandó:

$$f(x, y) = \sin(x)\sin(y)\sin(\pi - x - y) = \sin(x)\sin(y)\sin(x + y),$$

ahol $f : [0, \pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$. A maximum létezik.

Ha $0 < x,\ y < \pi$, akkor $f(x, y) > 0$, egyébként $f(x, y) = 0$. A függvény maximuma belső pontban van.

A stacionárius pontok:

$$f'_x(x, y) = \cos x \sin y \sin(x + y) + \sin x \sin y \cos(x + y) = 0,$$

$$f'_y(x, y) = \sin x \cos y \sin(x + y) + \sin x \sin y \cos(x + y) = 0.$$

$$\cos x \cancel{\sin y} \sin(x+y) + \sin x \cancel{\sin y} \cos(x+y) = 0, \quad (1)$$

$$\cancel{\sin x} \cos y \sin(x+y) + \cancel{\sin x} \sin y \cos(x+y) = 0. \quad (2)$$

$(1) - (2) \quad \Longrightarrow \quad \tan y = \tan x \quad \Longrightarrow \quad x = y.$

Ezt visszahelyettesítve:

$$\cos x \sin 2x + \sin x \cos 2x = 0, \quad \Longrightarrow \quad \sin 3x = 0.$$

Ezért $x = y = \frac{\pi}{3}$, a háromszög egyenlő oldalú.

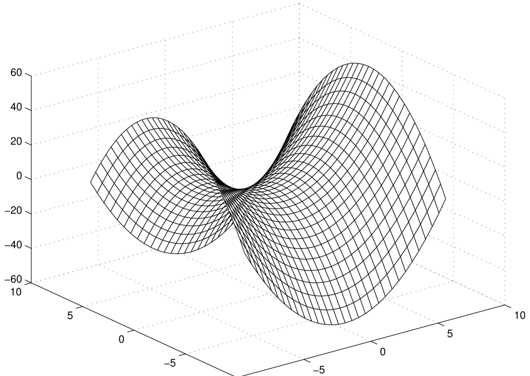
Nyereg pont

Definíció.

Azt az (x_0, y_0) *stacionárius pontot, ahol nincs szélsőérték,*

NYEREGPONT*-nak nevezzük.*

Példa. $f(x, y) = x^2 - y^2$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$.



Ismétlés, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Tétel. (Lokális szélsőérték, elégséges feltétel)

f kétszer differenciálható.

Tegyük fel, hogy $f'(x_0) = 0$ (stacionárius pont), akkor:

$\dashrightarrow$ *ha $f''(x_0) > 0$, akkor x_0 **lokális minimum**,*

$\dashrightarrow$ *ha $f''(x_0) < 0$, akkor x_0 **lokális maximum**,*

$\dashrightarrow$ *ha $f''(x_0) = 0$, akkor **nem eldönthető**, vajon van-e szélsőérték.*

f kétváltozós függvény

Tétel. (Elégséges feltétel a szélsőérték létezésére.)

f kétszer differenciálható.

Tfh $\mathrm{grad}\, f(x_0, y_0) = (0, 0)$ *(stacionárius pont). Hesse mátrixa* $H_0 := H(x_0, y_0)$*. Ekkor*

- *ha H_0 pozitív definit, akkor (x_0, y_0) lokális minimum,*
- *ha H_0 negatív definit, akkor lokális maximuma,*
- *ha H_0 indefinit, akkor nincs szélsőértéke,*
- *ha H_0 szemidefinit, akkor lehet, hogy lokális szélsőértéke van, és lehet, hogy nincs.*

A Tételt nem bizonyítjuk.