Kétváltozós függvények. 3. rész

2018. március 8.

Differenciálható függvény. Ismétlés

Ha az f függvény differenciálható az (x, y) pontban, akkor így írható:

$$\boxed{f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}).}$$

Geometriai jelentés:

Ha a függvény differenciálható (x_0, y_0)-ban, akkor a pont körül a függvény értékét közelíthetjük:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

ahol $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$. Ez az érintősík.

Érintősík

$$\boxed{f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}).}$$

Az érintősík egyenlete tehát ez lesz:

$$z = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0).$$

"Megszokott" sík egyenlet, $z_0 = f(x_0,y_0)$:

$$f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0) + (-1)(z - z_0) = 0,$$

$$\Longrightarrow \quad f'_x(x_0,y_0)x + f'_y(x_0,y_0)y - z = C.$$

A sík (egyik) normálvektora $\underline{n} = (f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0), -1)$.

Gradiens vektor

Definíció.

Ha $f : S \to \mathbb{R}$ *differenciálható az* $(x, y)\epsilon\text{int}\, S$*-ban, akkor a* DERIVÁLT *egy kétdimenziós vektor, melyet* GRADIENS*nek nevezünk:*

$$\text{grad}\, f(x, y) = (f'_x(x, y), f'_y(x, y)).$$

Ha f *differenciálható* $\forall(x, y)$*-ban, akkor a* DERIVÁLTFÜGGVÉNY

$$\text{grad}\, f : S \to \mathbb{R}^2$$

Deriválhatóság, új forma

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x, y+\Delta y) &= f(x,y) + f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + \\ &+ o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}). \end{aligned}$$

Bevezetve a jelölést:

$$\Delta f(x,y) := f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y),$$

a deriválhatósági összefüggés tömören így is írható:

$$\Delta f(x,y) = \mathrm{grad}\, f(x,y) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}).$$

Deriválhatóság és parciális deriváltak

Tétel.

$f : S \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \epsilon \operatorname{int} S$. *Tegyük fel, hogy az* (x_0, y_0) *valamely U környezetében*

- *léteznek az* $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ *parciális deriváltak, minden* $(x, y) \epsilon U$,
- *és folytonosak* (x_0, y_0)*-ban.*

Ekkor f differenciálható (x_0, y_0)*- ban.*

Megjegyzés. A Tétel feltétele *elégséges feltételt* ad a teljes differenviálhatóságra.

Bizonyítás. A Lagrange-féle középértéktételt alkalmazva:

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=f(x,y)-f(x,y_0)\quad+f(x,y_0)-f(x_0,y_0)=$$

$$=f'_y(x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y+f'_x(x_0+\theta'\Delta x,y_0)\Delta x.$$

A parciális deriváltak folytonossága miatt:

$$f'_y(x,\xi_y)=f'_y(x_0,y_0)+\varepsilon_1,\quad f'_x(\xi_x,y_0)=f'_x(x_0,y_0)+\varepsilon_2,$$

ahol $\lim_{\Delta x,\Delta y\to 0}\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)=0$, $\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon_2(\Delta x)=0$. Visszahelyettesítve:

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}),$$

ahol $o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})=\Delta x\cdot\varepsilon_2+\Delta y\cdot\varepsilon_1$, azaz differenciálható.

Iránymenti derivált

Az $f(x+\Delta x, y+\Delta y)$ értékeit csak megadott irányban nézzük:

$$\Delta x = \varrho \cos\alpha, \qquad \Delta y = \varrho \sin\alpha, \quad \varrho \epsilon \mathbb{R}.$$

Definíció.

Legyen $\alpha \epsilon [0, 2\pi)$. Az α irányú IRÁNYMENTI DERIVÁLT*:*

$$D_\alpha f(x,y) = \lim_{\varrho \to 0+} \frac{f(x+\varrho\cos\alpha, y+\varrho\sin\alpha) - f(x,y)}{\varrho},$$

ha ez a határérték létezik. Másik jelölés: $\dfrac{\partial}{\partial\alpha} f(x,y)$*.*

Megjegyzés. Speciális esetben, $\alpha = 0$ ill. $\alpha = \pi/2$-re:

$$D_0 f(x,y) = f'_x(x,y), \qquad D_{\pi/2} f(x,y) = f'_y(x,y).$$

Iránymenti derivált

Megjegyzés.

$$\text{Differenciálhatóság} \quad \Longrightarrow \quad \text{”minden irányban sima”}.$$

Állítás. Tegyük fel, hogy az f függvény differenciálható (x, y)-ban. Ekkor ebben a pontban tetszőleges $\alpha \epsilon [0, 2\pi)$ esetén létezik az iránymenti derivált,és

$$D_\alpha f(x, y) = f'_x(x, y) \cos \alpha + f'_y(x, y) \sin \alpha.$$

$$D_\alpha f(x,y) = f'_x(x,y)\cos\alpha + f'_y(x,y)\sin\alpha.$$

Bizonyítás. A differenciálhatóság miatt

$$f(x+\varrho\cos\alpha, y+\varrho\sin\alpha) =$$

$$= f(x,y) + f'_x(x,y)\varrho\cos\alpha + f'_y(x,y)\varrho\sin\alpha + o(|\varrho|)$$

Ebből következik, hogy

$$\frac{f(x+\varrho\cos\alpha, y+\varrho\sin\alpha) - f(x,y)}{\varrho} =$$

$$= f'_x(x,y)\cos\alpha + f'_y(x,y)\sin\alpha + \frac{o(|\varrho|)}{\varrho}$$

$$\longrightarrow \qquad f'_x(x,y)\cos\alpha + f'_y(x,y)\sin\alpha, \quad \text{ha} \quad \varrho \to 0+.$$

Iránymenti derivált, általában

Definíció.

Adott $v = (v_1, v_2)$ *irány, melyre* $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$*. A* v

IRÁNYMENTI DERIVÁLT *az* (x, y) *pontban:*

$$D_v f(x, y) = \lim_{\varrho \to 0+} \frac{f(x + \varrho v_1, y + \varrho v_2) - f(x, y)}{\varrho},$$

ha ez a határérték létezik.

Következmény. Ha f differenciálható, akkor *a* $D_v f(x, y)$

iránymenti derivált kiszámítása:

$$D_v f(x, y) = v_1 \ f'_x(x, y) + v_2 \ f'_y(x, y) = \langle \mathrm{grad}\ f, v \rangle.$$

Példa

Legyen $f(x, y) = x^2 + y^2$, $v = (\cos \alpha, \sin \alpha)$.

$f'_x(x, y) = 2x,\ f'_y(x, y) = 2y \implies D_\alpha f(x, y) = 2x\cos \alpha + 2y\sin \alpha.$

Adott r sugarú kör mentén: $x_0 = r \cos \theta$, $y_0 = r \sin \theta$.

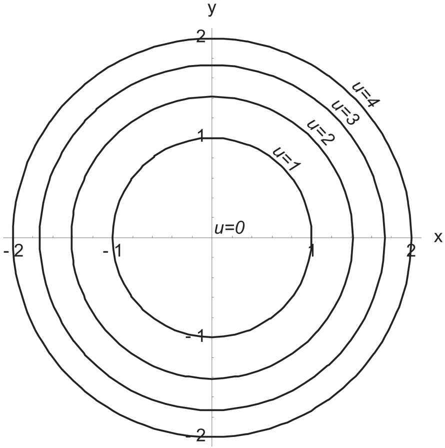
$$D_\alpha f(x_0, y_0) = 2r \cos \theta \cos \alpha + 2r \sin \theta \sin \alpha = 2r \cos(\theta - \alpha)$$

Látható, hogy

- $D_\alpha f(x_0, y_0)$ maximális, ha $\alpha = \theta$,
- $D_\alpha f(x_0, y_0) = 0$, ha $\theta - \alpha = \pi/2$.

Vajon hogyan értelmezhetjük geometriailag ezt a tényt?

Az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény szintvonalai:



- $D_\alpha f(x_0, y_0)$ maximális, ha $\alpha = \theta$,
- $D_\alpha f(x_0, y_0) = 0$, ha $\theta - \alpha = \pi/2$.

Magasabb rendű deriváltak

Definíció.

$f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, és $(x_0, y_0)\epsilon\mathrm{int}\ S$. Azt mondjuk, hogy f KÉTSZER DIFFERENCIÁLHATÓ *ebben a pontban, ha*

- *f differenciálható a (x_0, y_0) egy környezetében,*
- *és $f'_x(x, y)$ és az $f'_y(x, y)$ is differenciálhatóak az (x_0, y_0) pontban.*

Tétel.

Ha f kétszer differenciálható $(x_0, y_0)\epsilon\mathrm{int}\ D_f$ pontban, akkor

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Hesse mátrix

Definíció.

Ha a függvény kétszer differenciálható, akkor a függvény MÁSODIK DERIVÁLTJA *egy mátrix:*

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{yx}(x_0, y_0) \\ \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

$H(x_0, y_0)$ *az adott ponthoz tartozó* HESSE MÁTRIX.

Következmény. Hesse mátrix mindig szimmetrikus.

Kitekintés $\mathbb{R}^n$-re

Pontok $\mathbb{R}^n$-ben

Definíció.

$\mathbb{R}^n$ elemei a rendezett szám n-esek: $P = (x_1, \ldots, x_n)$, $P' = (x'_1, \ldots, x'_n)$. Ezek AZ *$n$* DIMENZIÓS TÉR PONTJAI*.*

A két pont TÁVOLSÁGA*:*

$$\begin{aligned} \|P - P'\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x'_i)^2} = \\ &= \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \cdots + (x_n - x'_n)^2}. \end{aligned}$$

Halmazok $\mathbb{R}^n$-ben

Definíció.

$P = (x_1, \ldots, x_n) \epsilon \mathbb{R}^n$ *pont környezetei n-dimenziós* GÖMB*ök:*

$$S(P, \varepsilon) = \left\{ Q = (x_1', \ldots, x_n') \epsilon \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k')^2 < \varepsilon^2 \right\}.$$

Legyenek $a_k < b_k$, $k = 1, 2, \ldots n$ *adott valós számok.*

$$T = \{(x_1, \ldots, x_n) : \ a_k \le x_k \le b_k, \ k = 1, \ldots, n\} \subset \mathbb{R}^n.$$

$T = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ *n-dimenziós* INTERVALLUM.

Függvény, definíciók

$S \subset \mathbb{R}^n$, $f : S \to \mathbb{R}$ n-VÁLTOZÓS FÜGGVÉNY.

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Az i-dik változó szerinti PARCIÁLIS DERIVÁLT:

$$f'_{x_i}(x) = \lim_{\xi \to x_i} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1} \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots x_i, \ldots, x_n)}{\xi - x_i},$$

ha a fenti határtérték létezik és véges. További jelölés $\dfrac{\partial}{\partial x_i} f(x)$

Teljes derivált

$f: S \to \mathbb{R}$ n-változós valós függvény, x belső pontja S-nek.

Definíció.

Az f függvény TELJESEN DIFFERENCIÁLHATÓ *x-ben, ha* $\exists A \epsilon \mathbb{R}^n$*, hogy* $\forall \Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ *elegendően kicsi megváltozás esetén, melyre* $x + \Delta x \epsilon S$*:*

$$f(x + \Delta x) = f(x) + A\Delta x + o(\|\Delta x\|),$$

ahol $\|\Delta x\| = \sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$.

$f(x+\Delta x) = f(x) + A\Delta x + o(\|\Delta x\|)$

Tétel.

Ha f differenciálható egy $a \epsilon S$ belső pontban, akkor

$$A = (f'_{x_1}(a), \ldots, f'_{x_n}(a)) =: \mathrm{grad}\, f(a).$$

Tétel.

$f: S \to \mathbb{R}$, $a \epsilon \operatorname{int} S$. Tfh az a valamely U környezetében

- *léteznek az $f'_{x_k}(x)$, $k = 1, \ldots n$ parciális deriváltak, $\forall x \epsilon U$,*
- *és folytonosak a-ban.*

Ekkor f differenciálható a- ban.

Második derivált

Definíció.

Tfh az f függvény parciális deriváltfüggvényei teljesen differenciálhatóak $x \epsilon D_f$-ben.

A MÁSODIK DERIVÁLT *egy mátrix* $H(x) \epsilon \mathbb{R}^{n \times n}$ *, melynek* (i, j)*-dik eleme :*

$$H_{ij}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

$H(x)$ az x pontbeli HESSE MÁTRIX.

Iránymenti derivált

Definíció.

Adott az $f : S \to \mathbb{R}$*, és* $x \epsilon \operatorname{int} S$*. Adott egy* $v = (v_1, \ldots, v_n)$ *irány, mely* $\|v\| = 1$*. Az* f *függvény* v IRÁNYÚ DERIVÁLTJA*:*

$$D_v f(x) := \lim_{\varrho \to 0+} \frac{f(x + \varrho v) - f(x)}{\varrho},$$

ha a fenti határérték létezik és véges.

Tétel.

Ha f *teljesen differenciálható* x*-ben, akkor* $\forall v$*-re* $\exists D_v f(x)$*, és*

$$D_v f(x) = v_1 f'_{x_1}(x) + \ldots + v_n f'_{x_n}(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i f'_{x_i}(x) = \langle \operatorname{grad} f(x), v \rangle.$$

Differenciálszámítás $\mathbb{R}^2$-ben, folytatás

Összetett függvény

$\equiv$ Láncszabály két dimenzióban

Ismétlés. Láncszabály valós függvények esetén:

f a külső függvény, g a belső függvény. Tfh mindkettő differenciálható.

Ekkor

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x).$$

Láncszabály 2-dim-ban. I.

A *külső függvény* $f(u)$, A *belső függvény* $u = \phi(x, y)$,

$\Longrightarrow$ Az összetett függvény $F(x, y) := f(\phi(x, y))$.

Tétel.

Legyen $S \subset \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}$.

- *Tfh* $\phi : S \to \mathbb{R}$ *differenciálható az* $(x, y)\epsilon\mathrm{int}\, S$ *pontban.*
- *Tfh* $f : D \to \mathbb{R}$ *differenciálható* $u = \phi(x, y)$*-ban.*

Akkor $F = f \circ \phi : S \to \mathbb{R}$ *differenciálható* (x, y)*-ban, és*

$$F'_x(x, y) = f'(\phi(x, y))\, \phi'_x(x, y), \quad F'_y(x, y) = f'(\phi(x, y))\, \phi'_y(x, y).$$

$F(x,y) := f(\phi(x,y))$. Bizonyítás.

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y) = f(\phi(x+\Delta x, y+\Delta y)) - f(\phi(x,y)) = (*)$$

f differenciálható, ezért $f(u+\Delta u) - f(u) = f'(u)\,\Delta u + \varepsilon(\Delta u)$

$$\begin{aligned}(*) &= f'(\phi(x,y))\Delta\phi(x,y) + \varepsilon = \\ &= f'(\phi(x,y)) \cdot \left(\phi'_x(x,y)\Delta x + \phi'_y(x,y)\Delta y + \varepsilon_1\right) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\begin{aligned}&F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y) = \\ =\ &\left(f'(\phi(x,y))\phi'_x(x,y)\right)\Delta x + \left(f'(\phi(x,y))\phi'_y(x,y)\right)\Delta y + \varepsilon_2.\end{aligned}$$

F differenciálható. A jobboldal fő tagja: $F'_x(x,y)\Delta x + F'_y(x,y)\Delta y$.

Példa

Legyen $F(x, y) = f^2(x, y)$, ahol $f(x, y)$

Külső függvény $z = u^2$, belső függvény $u = f(x, y)$.

Ekkor $\left(u^2\right)' = 2u$, ezért

$$F'_x(x, y) = 2f(x, y)\ f'_x(x, y), \quad F'_y(x, y) = 2f(x, y)\ f'_y(x, y).$$