Kétváltozós függvények. 3. rész

2018. március 5.

Differenciálszámítás $\mathbb{R}^2$-ben.

Parciális derivált

Definíció.

Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ *,* $S \subset \mathbb{R}^2$*, és legyen* $(x_0, y_0) \epsilon \mathrm{int}\ S$*.*

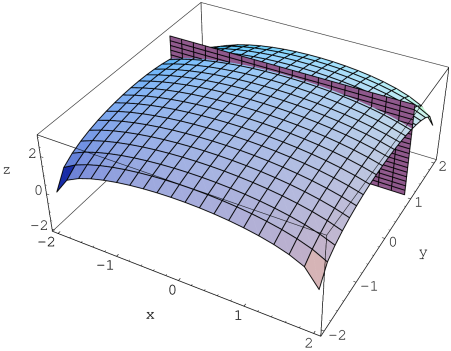
A függvény x szerinti PARCIÁLIS DERIVÁLTJA (x_0, y_0)*-ban:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0},$$

ha létezik és véges a fenti határérték.

Jelölés: $f'_x(x_0, y_0)$, vagy $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

x szerinti parciális derivált



Rögzített $y = 1$ mellett egy-változós függvényt kapunk. Ennek deriváltját számoljuk.

Parciális derivált

Definíció.

Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ *,* $S \subset \mathbb{R}^2$*, és legyen* $(x_0, y_0) \epsilon \mathrm{int}\ S$*. A függvény* *y szerinti* PARCIÁLIS DERIVÁLTJA *az* (x_0, y_0) *pontban:*

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0},$$

ha létezik és véges a fenti határérték.

Jelölés: $f'_y(x_0, y_0)$, vagy $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Parciális deriváltak

A parciális deriváltak számolhatók az egyváltozós függvényeknél megismert módon:

$$
\begin{aligned}
f'_x(x_0, y_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \\
f'_y(x_0, y_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}.
\end{aligned}
$$

Példa

$f(x, y) = x^2 y$. akkor ennek parciális deriváltjai

$$f'_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 y - x^2 y}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xhy}{h} = 2xy.$$

Hasonlóan

$$f'_y(x, y) = \cdots = x^2.$$

Parciális deriváltak értelmezése

Rögzített y_0 mellett $f_1(x) := f(x, y_0)$ egyváltozós valós függvény. $(x_0, y_0) \epsilon \mathrm{int}\ D_f,\ \implies x_0 \epsilon \mathrm{int}\ D_{f_1}$. Ekkor

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = f_1'(x_0).$$

Rögzített x_0 mellett $f_2(y) := f(x_0, y)$ egyváltozós valós függvény. $(x_0, y_0) \epsilon D_f \implies y_0 \epsilon \mathrm{int}\ D_{f_2}$. Ekkor

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = f_2'(y_0).$$

f_1 és f_2 az eredeti függvény *metszetfüggvényei*.

Parciális deriváltfüggvény

Definíció.

$f : S \to \mathbb{R}$ *kétváltozós valós függvény.*

Tfh $\forall (x, y) \in S$ *esetén létezik* $f'_x(x, y)$*.*

Ekkor a PARCIÁLIS DERIVÁLTFÜGGVÉNY

$$f'_x : S \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto f'_x(x, y).$$

A parciális deriváltfüggvény ugyanolyan típusú, mint az eredeti *kétváltozós, valós függvény*.

Másodrendű parciális deriváltak

Definíció.

Ha a parciális deriváltfüggvénynek létezik parciális deriváltja, akkor MÁSODRENDŰ PARCIÁLIS DERIVÁLT*at kapunk.*

Például:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f'_x(x, y+h) - f'_x(x, y)}{h}.$$

További jelölések: $\dfrac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) = f''_{xy}(x, y)$

Példa

$$f(x, y) = x^2 - xy + 3y^2.$$

Az elsőrendű deriváltak:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 2x - y, \\ f'_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = -x + 6y. \end{aligned}$$

A másodrendű deriváltak:

$$f''_{xx}(x, y) = 2, \qquad f''_{yy}(x, y) = 6,$$

$$f''_{yx}(x, y) = -1, \qquad f''_{xy}(x, y) = -1.$$

Magasabb rendű parciális deriváltak

Definíció.

Ha a másodrendű parciális deriváltfüggvénynek létezik parciális deriváltja, akkor HARMADRENDŰ PARCIÁLIS DERIVÁLT*at kapunk.*

Például:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y)\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f''_{xx}(x, y+h) - f''_{xx}(x, y)}{h}.$$

További jelölések: $\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} f(x, y) = f'''_{xxy}(x, y)$

És így tovább...Negyed- ötödrendű parciális deriváltak.

Parciális deriváltak és folytonosság?

Példa. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

A parciális deriváltak *léteznek* a $(0,0)$ pontban:

$$\begin{aligned} f'_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0 \\ f'_y(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0. \end{aligned}$$

Mégis, f nem folytonos $(0,0)$-ban! Valóban, a $y = kx$ mentén

$$f(x,kx) = \frac{x \cdot kx}{x^2 + k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2},$$

$(0,0)$-hoz tartva a határérték k-tól függ. Szemléletesen...

Parciális deriváltak és folytonosság

Tétel.

$f : S \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \epsilon \mathrm{int}\ S$.

Tfh az (x_0, y_0) valamely $U \subset \mathbb{R}^2$ környezetében f'_x és f'_y léteznek, és korlátosak:

$$|f'_x(x,y)| \leq M, \qquad |f'_y(x,y)| \leq M, \quad \forall (x,y) \epsilon U.$$

Ekkor az f függvény folytonos az (x_0, y_0)-ban.

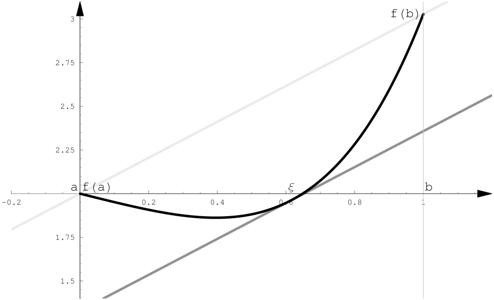
Bizonyításhoz előkészület:

Ismétlés

Tétel. (Lagrange-féle középérték tétel)

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *differenciálható. Ekkor* $\exists \xi \epsilon (a, b)$*, melyre:*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Lagrange-féle középértéktétel, újra

Kicsit másképpen:

Tétel.

Legyen $f : [a, a+h] \to \mathbb{R}$ *differenciálható. Ekkor* $\exists \xi \epsilon (a, a+h)$*, melyre:*

$$f(a+h) - f(a) = h \cdot f'(\xi).$$

Legyen $\xi = a + \theta h$, ahol $0 < \theta < 1$. Ekkor

$$f(a+h) - f(a) = f'(a + \theta h) \cdot h.$$

Tétel bizonyítás

Folytonosságot kell belátni.

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)| \leq |f(x,y)-f(x,y_0)| + |f(x,y_0)-f(x_0,y_0)| = (*).$$

A Lagrange-féle középértéktételből következik, hogy

$$f(x,y)-f(x,y_0) = f_2(y)-f_2(y_0) = f_2'(\xi_y)\Delta y = f_y'(x,\xi_y)\Delta y.$$

$$f(x,y_0)-f(x_0,y_0) = f_1(x)-f_1(x_0) = f_1'(\xi_x)\Delta x = f_x'(\xi_x,y_0)\Delta x.$$

$$\Longrightarrow \quad (*) \leq |f_x'(\xi_x,y_0)||\Delta x| + |f_y'(x,\xi_y)||\Delta y| \leq M(|\Delta x|+|\Delta y|).$$

Tehát

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)| \leq M(|\Delta x|+|\Delta y|) \leq M\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

$f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Magyarázat.

Az előző példa folytatása. Ha $(x,y) \neq (0,0)$, akkor az x szerinti parciális derivált:

$$f'_x(x,y) = \frac{y(x^2+y^2) - xy(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Ez nem korlátos az origó közelében, hiszen pl $y = 2x$ esetén

$$f'_x(x,2x) = \frac{6x^3}{25x^4} = \frac{6}{25x},$$

és ezért $|f'_x(x,2x)| \to \infty$ ha $x \to 0$.

Parciális deriválások sorrendje

Tétel.

$f : S \to \mathbb{R}$, $P_0 = (x_0, y_0) \epsilon \operatorname{int} S$. Tfh $\exists U$ környezete P_0-nak, melyben

1. *léteznek f''_{xy} és f''_{yx},*
2. *és (x_0, y_0)-ban folytonosak.*

Akkor

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

A fenti feltételek mellett itt a deriválások sorrendje felcserélhető.

A Tételt nem bizonyítjuk.

Parciális deriválások sorrendje

Következmény. Ha a megfelelő parciális deriváltfüggvények folytonosak:

$$f'''_{xxy} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx}.$$

és így tovább... feltéve, hogy a parciális deriváltak folytonos függvények:

$$f^{(4)}_{xyxy} = f^{(4)}_{xxyy} = f^{(4)}_{yyxx} = \ldots$$

A deriválások sorrendje nem cserélhető fel automatikusan!

Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}xy & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

A vegyes másodrendű parciális deriváltak $(0,0)$-ban?

$$f'_x(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2}hy}{h} = y \lim_{h\to 0} \frac{h^2-y^2}{h^2+y^2} = -y,$$

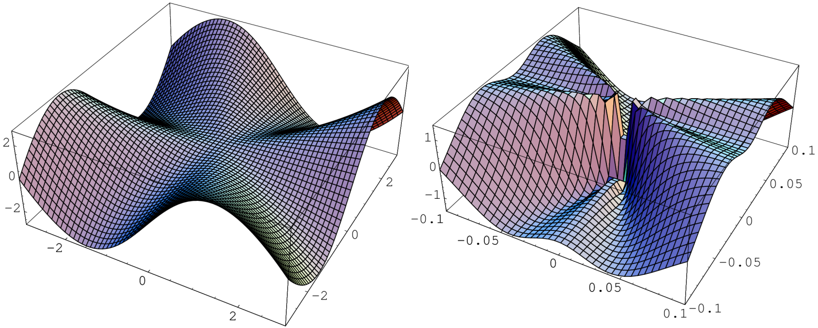
$$\Longrightarrow \quad f''_{yx}(0,0) = pp - 1.$$

Fordított sorrendben deriválva

$$f'_y(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,h) - f(x,0)}{h} = \dots = x, \quad \Longrightarrow \quad f''_{xy}(0,0) = 1.$$

A két érték különbözik! f''_{xy} nem-folytonos az origóban.

A függvény, és f''_{yx} második deriváltja:



Teljes differenciálhatóság

Ismétlés

"f differenciálható az $x \epsilon \mathrm{int}\ D_f$ *pontban"*, ha a határérték létezik:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = A.$$

Ez azt jelenti, hogy ha Δx elég kicsi, akkor

$$f(x+\Delta x) = f(x) + A\Delta x + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

ahol A független Δx-től és $\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$.

Tehát jól közelíthető lineáris függvénnyel.

Deriválhatóság

Definíció.

Egy $h(x)$ *függvény* KISORDÓ *a* 0*-ban, ha*

$$\lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{x}=0.$$

Ezt úgy jelöljük, hogy $h(x)=o(x)$*.*

Definíció.

$f:S\to\mathbf{R}$*, és* $(x,y)\epsilon\mathrm{int}\,S$*. Az* f *függvény* DIFFERENCIÁLHATÓ (x,y)*-ban, ha* $\exists A,B,C$*, melyekre*

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)=A\Delta x+B\Delta y+C+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$$

elegendően kicsi Δx *és* Δy *mellett.*A,B,C *függetlenek* Δx*-től és* Δy*-tól.*

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = A\Delta x + B\Delta y + C + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

Tétel.

Ha f differenciálható az (x, y) pontban, akkor

1. *folytonos az (x, y) pontban,*
2. *és léteznek az az (x, y) pontban a parciális deriváltak.*

Továbbá a képletben szereplő konstansokra

$$C = f(x, y); \qquad A = f'_x(x, y); \qquad B = f'_y(x, y).$$

Bizonyítás

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = A\Delta x + B\Delta y + C + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

Ha $\quad \Delta x = \Delta y = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x,y) = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C + 0 = C.$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = A\Delta x + B\Delta y + f(x,y) + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

A folytonossághoz:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \longrightarrow 0.$$

Parciális deriváltak:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = f'_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}) = A.$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = f'_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} (B + \frac{o(|\Delta y|)}{\Delta y}) = B.$$

Differenciálható függvény

Következmény. Ha az f függvény differenciálható az (x, y) pontban, akkor így írható:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y)+f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}).$$

Geometriai jelentés:

Ha a függvény differenciálható (x_0, y_0)-ban, akkor a pont körül a függvény értékét közelíthetjük:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

ahol $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$. Ez az érintősík.