

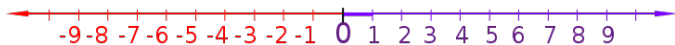
# Kétváltozós függvények. 1. rész

2020. február 24.

Pontok és pontsorozatok  $\mathbb{R}^2$ -ben.

# $\mathbb{R}^2$ pontjai

Ismétlés:  $\mathbb{R}$  a valós számok halmaza.



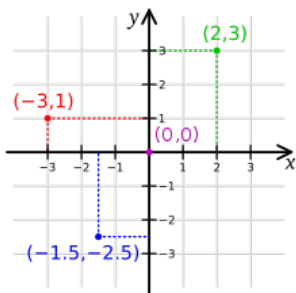
$\mathbb{R}^2$ : számpárok halmaza:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

*Azonosítás.*

A számsík pontjai  $\equiv$   
rendezett számpárok

$$P = (x, y)$$



# Távolság

Definíció.

$P = (x, y)$  és  $P' = (x', y')$  két pont  $\mathbb{R}^2$ -ben. Ezek távolsága:

$$\overline{PP'} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

További jelölések:  $\rho(P, P')$ ,  $\|P - P'\|$ . Az origóból az  $(x, y)$  pontba mutató vektor hossza

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Háromszög egyenlőtlenség

$$\|(x, y) + (x', y')\| \leq \|(x, y)\| + \|(x', y')\|.$$

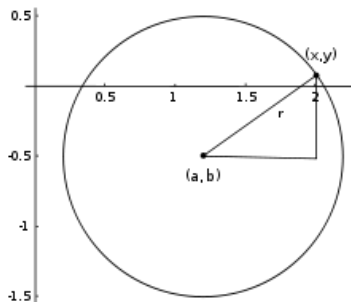
## $r$ -sugarú "gömb"

Definíció.

Legyen adott a  $C \in \mathbb{R}^2$  pont,  $C = (a, b)$ , és az  $r > 0$  valós szám.

A  $C$  pont körüli  $r$ -sugarú gömböt így definiáljuk:

$$S(C, r) = \{P \in \mathbb{R}^2 : \overline{PC} < r\}.$$



Egy körlemez kapunk  $C$  középponttal.

# Pontsorozat a síkon

## Definíció.

*Pontsorozat alatt síkbeli pontok sorozatát értjük:*

$$P_n = (x_n, y_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

1. *Példa.* Két pontsorozat:

$$P_n^{(1)} = (n, n^2), \quad P_n^{(2)} = ((-1)^n, 2).$$

Megjegyzés: A sorozat tagjai nem feltétlenül különböznek.

# Pontsorozat korlátossága

## Definíció.

*A  $(P_n)$  sorozat korlátos, ha létezik egy olyan  $S(C, r)$  gömb, amely a sorozat minden elemét tartalmazza.*

$(P_n)$  korlátos, ha létezik  $C = (a, b)$  és  $r > 0$ :

$$\sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < r \quad \forall P_n = (x_n, y_n).$$

## 1. Példa. (folytatás)

- ▶  $P_n^{(1)} = (n, n^2)$  nem korlátos;
- ▶  $P_n^{(2)} = ((-1)^n, 2)$  korlátos.

# Pontsorozat konvergenciája

Definíció.

$A (P_n) \subset \mathbf{R}^2$  sorozat konvergens és határértéke  $Q \in \mathbf{R}^2$ , ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n - Q\| = 0. \quad (1)$$

Ezt így jelöljük:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = Q.$$

Megjegyzés. Az (1) egyenletben számsorozat konvergenciája szerepel.



# Pontsorozat konvergenciája

Definíció. (Ekvivalens)

$A (P_n)$  sorozat konvergens és határértéke  $Q$ , ha  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists N(\varepsilon)$ , hogy minden  $n \geq N(\varepsilon)$  esetén:

$$\|P_n - Q\| < \varepsilon.$$

Másképp fogalmazva: Minden  $\varepsilon > 0$  esetén az  $S(Q, \varepsilon)$  gömbön kívül csak véges sok pont van (véges sok indexű).

*Következmény.* Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos.

## Pontsorozat példa

2. Példa. Legyen  $P_n = (e^{-n/4} \cos(n), e^{-n/4} \sin(n))$ ,  $n \in \mathbf{N}$ .

→ DRAW

$$\begin{aligned}\|P_n - (0, 0)\| &= \|P_n\| = \sqrt{e^{-n/2} \cos^2 n + e^{-n/2} \sin^2 n} = \\ &= \sqrt{e^{-n/2}} = e^{-n/4} \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = (0, 0).\end{aligned}$$

## Pontsorozat koordinátái

**Állítás.** Tekintsük a  $P_n = (x_n, y_n)$  elemekből álló sorozatot.

Ekkor az alábbi két állítás ekvivalens:

1.  $(P_n)$  konvergens és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = Q = (x, y).$$

2. Az  $(x_n)$  és  $(y_n)$  sorozatok konvergensek és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y.$$

## $(P_n) = ((x_n, y_n))$ konvergenciája. Bizonyítás

1.  $\Rightarrow$  2. A pontsorozat konvergenciája miatt  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists N(\varepsilon)$  index, hogy  $\|P_n - Q\| < \varepsilon$ , ha  $n \geq N(\varepsilon)$ . Ekkor

$$|x_n - x| \leq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon,$$

és hasonlóan  $|y_n - y| < \varepsilon$  is teljesül.

2.  $\Rightarrow$  1.  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists N(\varepsilon)$  küszöbindex, hogy  $\forall n \geq N$ -re:

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \quad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Ekkor  $(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2 < \varepsilon^2$  így

$$\|P_n - Q\| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon.$$

# Cauchy-féle feltétel

## Definíció.

*A  $(P_n)$  sorozat teljesíti a Cauchy-féle feltételt, ha minden  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists N(\varepsilon)$  küszöbindex, amelyre  $\forall n, m \geq N$  esetén*

$$\|P_n - P_m\| < \varepsilon.$$

**Állítás.** A  $(P_n)$  pontsorozat pontosan akkor konvergens, ha teljesíti a Cauchy-féle feltételt.

## Cauchy $\iff$ konvergens

**Bizonyítás.**  $\leftarrow$

Tfh a sorozat konvergens. Legyen  $\varepsilon$  tetszőleges. Akkor  $\exists N$  küszöbindex, amelyre

$$\|P_n - P\| < \varepsilon/2 \quad \forall n \geq N.$$

Ekkor ha  $n, m \geq N$ , akkor

$$\|P_n - P_m\| \leq \|P_n - P\| + \|P - P_m\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

A másik irányt nem bizonyítjuk.

## Bolzano-Weierstrass tétel $\mathbb{R}^2$ -ben

Tétel.

Legyen  $(P_n)$  korlátos pontsorozat a síkon,  $P_n = (x_n, y_n)$ .

Ekkor van konvergens részsorozata.

**Bizonyítás.** Ha  $(P_n)$  korlátos, akkor  $(x_n)$  és  $(y_n)$  is korlátosak.

Ezért  $(x_n)$ -nek létezik konvergens részsorozata:  $(x_{m_k})$ ,

és  $(y_{m_k})$ -nak is van konvergens részsorozata:  $(y_{n_k})$ .

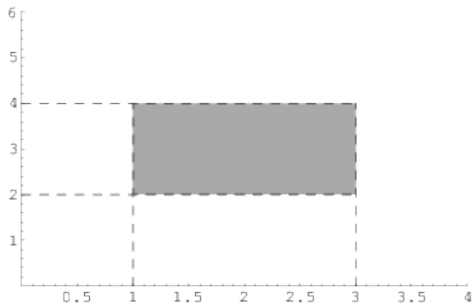
Ekkor  $(P_{n_k})$  konvergens.

## Halmazok $\mathbb{R}^2$ -ben

$\mathbb{R}^2$  részhalmazait tartományoknak is nevezzük.

*Példa. Téglalap.* Legyenek  $a < b$  és  $c < d$  adott valós számok:

$$T = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\} = [a, b] \times [c, d].$$



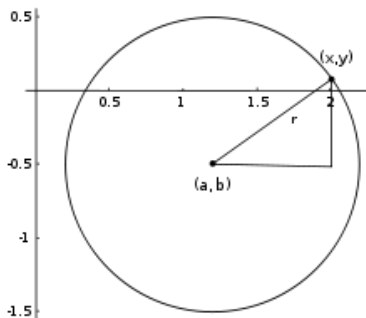


## Halmazok $\mathbb{R}^2$ -ben

*Példa. Gömb.* (Ez kétdimenzióban egy körlemeznek felel meg.)

Legyen  $r > 0$  valós szám és  $C = (a, b) \in \mathbb{R}^2$  síkbeli pont adottak,

$$S(C, r) = \{(x, y) : \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < r\}.$$



# Környezet

*Ismétlés.* 1-dimenzióban az  $a \in \mathbb{R}$  pont környezetei:

$U = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , tetszőleges  $\varepsilon > 0$  esetén.

**Definíció.**

$P = (x, y)$  pont környezetei  $U = S(P, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2$  tartományok, melyek  $P$  középpontú  $\varepsilon$  sugarú gömbök.

## $S \subset \mathbb{R}^2$ tartomány

### Definíció.

$Q \in S$  belső pontja  $S$ -nek, ha  $Q$ -nak  $\exists U$  környezete:  $U \subset S$ .

$Q \in \mathbb{R}^2$  külső pontja  $S$ -nek, ha  $Q$ -nak  $\exists U$  környezete:  $U \cap S = \emptyset$ .

$Q \in \mathbb{R}^2$  határpontja  $S$ -nek, ha  $Q \in \forall U$  környezetére:

$\exists P' \in U : P' \in S, \exists P'' \in U : P'' \notin S$ .

### Következmény.

Tetszőleges  $S$  halmaz esetén a sík 3 diszjunkt részre osztható:

$$\mathbb{R}^2 = \text{ext}(S) \cup \text{int}(S) \cup \partial S.$$

## Halmazok $\mathbb{R}^2$ -ben

Definíció.

Az  $S$  halmaz *zárt*, ha minden határpontját tartalmazza.  $S$  *nyílt*, ha minden pontja belső pont. Az  $S$  halmaz *lezárása*:

$$\overline{S} = S \cup \partial S.$$

*Példa.* Az  $S(C, r)$  gömb nyílt halmaz. (Miért?) Ennek határpontjai, ill. lezárása:

$$\partial S(C, r) = \{P : \|P - C\| = r\},$$

$$\overline{S(C, r)} = \{P : \|P - C\| \leq r\}.$$

## Halmazok $\mathbb{R}^2$ -ben

*Példa.* Legyen  $S = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}\}$ . Ekkor  $\bar{S} = \mathbb{R}^2$ .

**Definíció.**

$P$  az  $S$  halmaz *torlódási pontja*, ha  $\exists (P_n) \subset S$  sorozat, melyre

$P_n \neq P$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$ .

Torlódási pontok lehetnek belső pontok és határpontok.

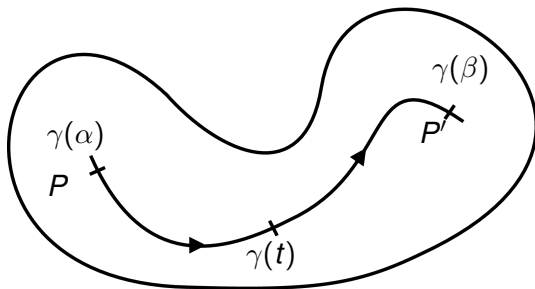
Zárt halmaz minden torlódási pontját tartalmazza.

## Folytonos vonal $\mathbb{R}^2$ -ben

### Definíció.

Legyen  $P, P' \in \mathbb{R}^2$ . Az ezeket összekötő FOLYTONOS VONAL egy függvény, melyre

$$\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(\alpha) = P, \quad \gamma(\beta) = P'.$$



## Folytonos vonal $\mathbb{R}^2$ -ben

A  $\gamma(t) \in \mathbb{R}^2$  pont koordinátáit jelölje  $\gamma(t) =: (x(t), y(t))$ .

$$x, y : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$$

Tfh az  $(x(t), y(t))$  koordináta-függvények folytonosak.

Egy  $\{\gamma(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$  vonalat is  $\mathbb{R}^2$ -beli részhalmaznak tekintünk, természetes módon.

### Definíció.

$S \subset \mathbb{R}^2$  ÖSSZEFÜGGŐ , ha bármely két pontját kiválasztva tartalmaz egy őket összekötő folytonos vonalat.

## Szakasz $\mathbb{R}^2$ -ben

### Definíció.

Legyen  $P = (x, y)$ ,  $P' = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ . A két pontot összekötő SZAKASZT az alábbi függvény írja le:

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) := P + t(P' - P).$$

Speciálisan tehát  $\gamma(0) = P$ ,  $\gamma(1) = P'$ .

### Definíció.

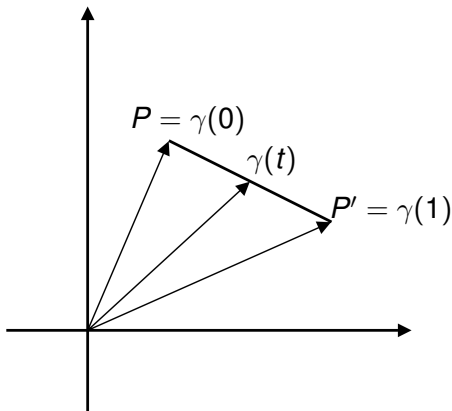
Az  $S \subset \mathbb{R}^2$  tartományt KONVEXnek nevezzük, ha bármely két pontjával együtt az őket összekötő szakaszt is tartalmazza.



Szakasz  $\mathbb{R}^2$ -ben:  $\gamma(t) := P + t(P' - P)$

A szakasz is folytonos vonal, az alábbi koordináta-függvényekkel:

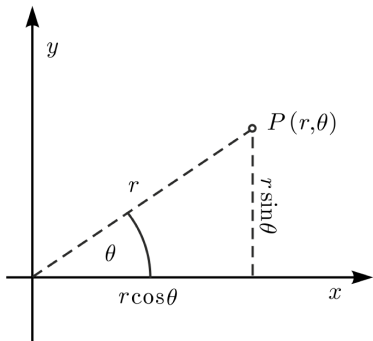
$$x(t) = x + t(x' - x), \quad y(t) = y + t(y' - y).$$



## Definíció.

Egy  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  pont *polárkoordinátái*  $(r, \theta)$ , melyek:

- $r$ : a pont origótól vett távolsága,  $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
- $\theta$ : az origóból a pontba mutató vektornak az  $x$  tengely pozitív részével bezárt szöge,  $\theta \in [0, 2\pi)$ .



Ha  $r$  és  $\theta$  adottak, akkor

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta).$$

A hozzárendelés **egy-egy-értelmű**, kivéve a  $(0, 0)$  pontot.

# Kétváltozós függvények

## Függvény megadása

*Példa.* Téglalap területe.  $T = x \cdot y$ .  $T = T(x, y)$ .

*Példa.* Mozgási energia.  $E = \frac{1}{2}mv^2$ .  $E = E(m, v)$ .

Adott  $S \subset \mathbb{R}^2$  tartomány.  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$

$$f : (x, y) \mapsto u, \quad (x, y) \in S.$$

$$u = f(x, y)$$

$(x, y)$ : független változók,  $u$ : függő változó.

*Példa.*  $u = \sin(xy)$  vagy  $u = \ln(y^2 + \cos(x/2))$ . ...