Kétváltozós függvények. 2. rész

2018. március 1.

Folytonosság $\mathbb{R}^2$-ben.

Folytonosság

Definíció.

$f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$. Legyen $P_0 = (x_0, y_0) \epsilon D$.

Az f függvény FOLYTONOS *(x_0, y_0)-ban, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$ szám, melyre*

$$\forall (x, y) \epsilon D_f, \qquad \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

esetén teljesül, hogy

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Sorozatfolytonosság

Definíció.

Az f függvény SOROZATFOLYTONOS *a* $P_0 \epsilon D_f$ *pontban,ha*

$\forall (P_n) \subset D_f$ *sorozatra, melyre*

$$\lim_{n \to \infty} P_n = P_0$$

teljesül, hogy

$$\lim_{n \to \infty} f(P_n) = f(P_0).$$

Folytonosság – Sorozatfolytonosság

Tétel.

Az f függvény folytonos P_0-ban $\Longleftrightarrow$ ott sorozatfolytonos.

Következmény: folytonos függvények összege, szorzata, skalárszorosa is folytonos.

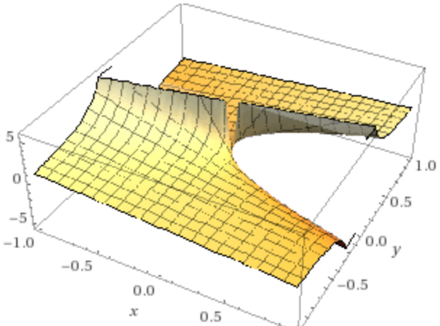
Definíció.

Ha egy függvény értelmezési tartományának egy pontjában nem folytonos, akkor ott SZAKADÁSA *van.*

Példák folytonosságra

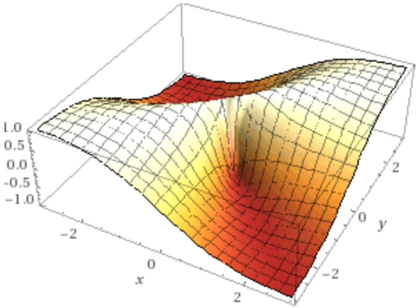
$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x}{y} & \text{ha} \quad y \neq 0 \\ \\ 0 & \text{ha} \quad y = 0 \end{cases}$$

A függvény $\forall (x,y)$ pontban folytonos, ahol $y \neq 0$.



Példák folytonosságra

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



$$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

A függvény (x,y)-ban folytonos, ha $x \neq 0$ és $y \neq 0$.

Ha $y \neq 0$, akkor $f(\cdot, y)$ folytonos, és $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0=f(0,y)$.
Ha $x \neq 0$, akkor $f(x,\cdot)$, folytonos, és $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0=f(x,0)$.

Tekintsük az $x=y$ egyenest. Az egyenes mentén $f(x,x)\equiv 1$.

Legyen $P_n=(a_n,a_n)$, (a_n) nullsorozat, akkor

$$\lim_{n\to\infty} P_n=(0,0), \qquad \lim_{n\to\infty} f(P_n)=1\neq f(0,0).$$

f tehát *nem folytonos a* $(0,0)$*-ban* és *folytonos* mindenütt másutt.

Példák folytonosságra

3. Példa. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

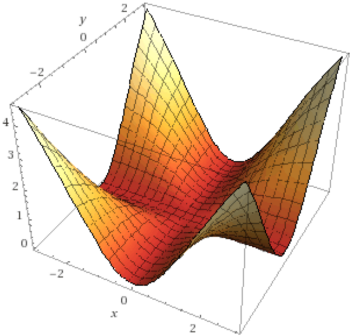
Folytonos-e a $(0,0)$ pontban?

Legyen (P_n) egy olyan sorozat, melyre $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = (0,0)$.

Ha $P_n = (r_n, \theta_n)$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, (θ_n) bármi lehet.

Ha $(x, y) \neq (0, 0)$, akkor

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \frac{r^2 \cos^2(\theta)\, r^2 \sin^2(\theta)}{r^2} = r^2 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta).$$



Ezért valóban

$$\lim_{n \to \infty} f(P_n) = f(0, 0),$$

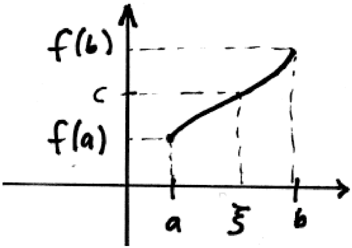
tehát a függvény folytonos az origóban.

Kitérő: Bolzano tétel egyváltozós függvényekre

Tétel.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény. Tegyük fel, hogy* $f(a) < f(b)$.

Ekkor $\forall c$, $f(a) < c < f(b)$*-hez* $\exists \xi \epsilon (a, b)$, *melyre* $f(\xi) = c$.



Bolzano tétel kétváltozós függényekre

Tétel. (Bolzano tétel)

Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény,* $S \subset \mathbb{R}^2$ *összefüggő.*

Adottak $P = (x, y) \epsilon S$ *és* $P' = (x', y') \epsilon S$*, melyekre*

$$a = f(x, y) < f(x', y') = b.$$

Ekkor $\forall c \epsilon (a, b)$ *számhoz* $\exists Q = (x_0, y_0) \epsilon S$ *pont, melyre* $f(x_0, y_0) = c$.

Bolzano tétel bizonyítás

S összefüggő, ezért $\exists \gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ folytonos vonal, melyre

$$\gamma(\alpha) = (x, y), \qquad \gamma(\beta) = (x', y').$$

$\gamma(t) = (x(t), y(t))$, és a koordináta-függvények folytonosak.

Definiáljuk $F(t) := f \circ \gamma(t) = f(x(t), y(t))$.

$F : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ folytonos, melyre $F(\alpha) = a$, és $F(\beta) = b$.

$a < c < b \quad \Longrightarrow \quad \exists \xi \epsilon (\alpha, \beta)$, melyre $F(\xi) = c$.

Ezért a $Q := \gamma(\xi) \epsilon S$ pontra $f(Q) = c$.

Egyenletes- és Lipschitz folytonosság

Definíció.

Legyen $f : S \to \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^2$ *tartomány.* f EGYENLETESEN FOLYTONOS S*-ben, ha* $\forall \varepsilon > 0$*-hoz* $\exists \delta > 0$*, hogy ha*

$$\|P - P'\| < \delta \qquad \textit{akkor} \qquad |f(P) - f(P')| < \varepsilon.$$

A $\delta = \delta(\varepsilon)$ *szám az* ε*-hoz tartozó* FOLYTONOSSÁGI MODULUS*.*

Definíció.

$f : S \to \mathbb{R}$ LIPSCHITZ FOLYTONOS S*-ben, ha* $\exists L > 0$*, melyre*

$$|f(P) - f(P')| \leq L \cdot \|P - P'\|, \qquad \forall P, P' \epsilon S.$$

Az L *szám* LIPSCHITZ-KONSTANS*.*

Egyenletes- és Lipschitz folytonosság

Állítás.

1. Ha f egyenletesen folytonos S-n $\implies$ minden pontban folytonos
2. Ha f Lipschitz folytonos egy tartományban $\implies$ ott egyenletesen is folytonos.

Bizonyítás. 2. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz a $\delta := \dfrac{\varepsilon}{L}$ megfeleltetés jó lesz.

Korlátos és zárt halmazon folytonos függvények

Tétel. (Heine tétel)

Legyen S korlátos és zárt tartomány $\mathbb{R}^2$-ben. Tegyük fel, hogy $f : S \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen is folytonos.

Bizonyítás. Indirekt. Tfh f *nem egyenletesen* folytonos. Ekkor $\exists \varepsilon > 0$, melyre ("$\forall \delta$ rossz"): $\forall \delta > 0$-hoz $\exists P, P'$:

$$\|P - P'\| < \delta, \qquad \text{de} \qquad |f(P) - f(P')| > \varepsilon. \tag{1}$$

$\delta = 1/n$-hez is $\exists P_n, P'_n$, hogy:

$$\|P_n - P'_n\| < \frac{1}{n}, \qquad |f(P_n) - f(P'_n)| > \varepsilon.$$

$$\|P_n - P'_n\| < \frac{1}{n}, \qquad |f(P_n) - f(P'_n)| > \varepsilon \quad \forall n \epsilon \mathbb{N}.$$

S korlátos $\implies$ (P_n), (P'_n) korlátosak, $\implies$ $\exists$ konvergens rész-sorozatuk.

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P, \qquad \lim_{n\to\infty} P'_n = P'.$$

Belátjuk, hogy $P = P'$.

$$\|P - P'\| = \|P - P_n + P_n - P'_n + P'_n - P'\| \leq$$

$$\leq \|P - P_n\| + \|P_n - P'_n\| + \|P'_n - P'\| \leq \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3}.$$

Így a $P = P' \epsilon S$-ben f folytonos.

$$\lim_{n\to\infty} f(P_n) = \lim_{n\to\infty} f(P'_n). \qquad \Rightarrow\!\Leftarrow$$

Weierstrass I. tétele

Tétel.

Legyen $S \subset \mathbb{R}^2$ korlátos és zárt. $f : S \to \mathbb{R}$ folytonos függvény.

Ekkor f korlátos.

Bizonyítás. Indirekt. Tfh R_f nem korlátos. Ekkor $\forall n$-hez

$\exists P_n = (x_n, y_n) \epsilon S$

$$|f(x_n, y_n)| > n, \qquad n \epsilon \mathbb{N}.$$

(P_n) korlátos. $\implies$ $\exists (P_{n_k})$ konvergens, $\lim P_{n_k} =: P_0$.

S zárt, ezért $P_0 \epsilon S$, és itt f folytonos.

$$\lim_{n_k \to \infty} f(x_{n_k}, y_{n_k}) = f(x_0, y_0) < \infty,$$

de az indirekt feltevés szerint $|f(x_{n_k}, y_{n_k})| > n_k$, $n_k \to \infty$. $\Rightarrow\!\Leftarrow$

Weierstrass II. tétele

Tétel.

Legyen $S \subset \mathbb{R}^2$ korlátos és zárt. $f : S \to \mathbb{R}$ folytonos függvény.

Ekkor f felveszi a maximumát és minimumát.

Bizonyítás. $\beta := \sup R_f$. Ekkor $\exists(h_n = f(x_n, y_n))$, hogy

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \beta.$$

$(P_n = (x_n, y_n)) \subset S$ korlátos, tehát $\exists(P_{n_k})$ konvergens.

S zárt, ezért $P := \lim_{k\to\infty} P_{n_k} \epsilon S$. P pontban f folytonos, tehát

$$\lim_{k\to\infty} f(P_{n_k}) = f(P), \qquad \lim_{k\to\infty} f(P_{n_k}) = \beta,$$

ezért $\beta = f(P) < \infty$.

Határérték $\mathbb{R}^2$-ben.

Határérték

Definíció.

Legyen $f : S \to \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^2$. $P_0 = (x_0, y_0) \epsilon \mathbb{R}^2$ *egy torlódási pontja* S*-nek.* f HATÁRÉRTÉKE *a* $P_0 = (x_0, y_0)$ *pontban* L, *azaz*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L,$$

ha minden $\varepsilon > 0$ *-hoz létezik* $\delta > 0$ *szám, hogy* $\forall (x,y) \epsilon S$*-re*

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta, \quad \Longrightarrow \quad |f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

Átviteli elv

Tétel.

A következő állítások ekvivalensek:

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L.$
2. $\forall P_n = (x_n, y_n)\epsilon S$ *sorozatra,* $P_n \neq P_0$

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(P_n) = L.$$

1. Példa

Legyen $S = \{(x, y), y > 0\}$, és $f : S \to \mathbb{R}$:

$$f(x, y) = e^{-x^2/y}, \quad y > 0.$$

Legyen $P_0 = (x_0, 0)$, ahol $x_0 \neq 0$ rögzített. Ekkor

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} e^{-x^2/y} = \lim_{y\to 0+} e^{-x_0^2/y} = 0.$$

Tfh az $y = kx^2$ parabola mentén tartunk a $(0, 0)$-hoz, $k > 0$ fix:

$P_n := (x_n, kx_n^2)$, ahol $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Ekkor $\lim P_n = (0, 0)$. $\forall n$:

$$f(P_n) = e^{-x_n^2/kx_n^2} = e^{-1/k}, \quad \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(P_n) = e^{-\frac{1}{k}}.$$

Tehát a $(0, 0)$-beli határérték függ a sorozat választásától, ezért a függvény határértéke nem létezik a $(0, 0)$ pontban.

2. *Példa.* Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x+2y}{3x-y} & \text{ha} \quad 3x-y \neq 0 \\ 0 & \text{ha} \quad 3x-y = 0 \end{cases}$$

Legyen $a_n = 1/n$, és nézzünk két pontsorozatot:

$$P_n = (a_n, a_n^2), \quad P'_n = (a_n^2, a_n).$$

Ekkor $\lim_{n\to\infty} P'_n = \lim_{n\to\infty} P_n = (0,0)$. Másrészt

$$f(P_n) = \frac{n+2}{3n-1}, \quad f(P'_n) = \frac{1+2n}{3-n},$$

és így tehát

$$\lim_{n\to\infty} f(P_n) = \frac{1}{3}, \qquad \lim_{n\to\infty} f(P'_n) = -2.$$

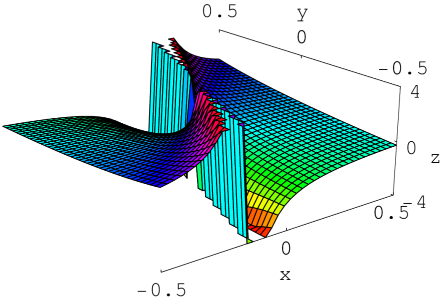
Ezért az origóban nincs határértéke a függvénynek.

Háttér: $(0,0)$-beli határérték "kétfajta közelítéssel"

1.) $$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x+2y}{3x-y}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}.$$

2.) $$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x+2y}{3x-y}=\lim_{y\to 0}\frac{2y}{-y}=-2$$

$-2 \neq \frac{1}{3}$, ezért nincs határérték.



... és ha a fenti határértékek egyenlőek lennének...?