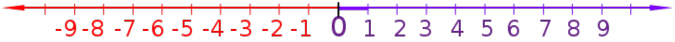
Kétváltozós függvények. 1. rész

2018. február 26.

Pontok és pontsorozatok $\mathbb{R}^2$-ben.

$\mathbb{R}^2$ pontjai

Ismétlés: $\mathbb{R}$ a valós számok halmaza.



$\mathbb{R}^2$: számpárok halmaza:

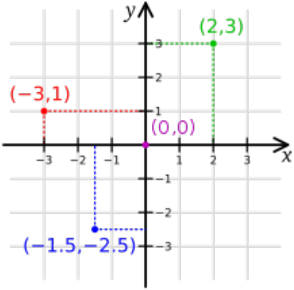
$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \ : \ x, y \epsilon \mathbb{R}\}$$

Azonosítás.

A számsík pontjai $\equiv$

rendezett számpárok

$$P = (x, y)$$



Távolság

Definíció.

$P = (x, y)$ és $P' = (x', y')$ két pont $\mathbb{R}^2$-ben. Ezek távolsága:

$$\overline{PP'} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

További jelölések: $\rho(P, P')$, $\|P - P'\|$. Az origóból az (x, y) pontba mutató vektor hossza

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Háromszög egyenlőtlenség

$$\|(x, y) + (x', y')\| \leq \|(x, y)\| + \|(x', y')\|.$$

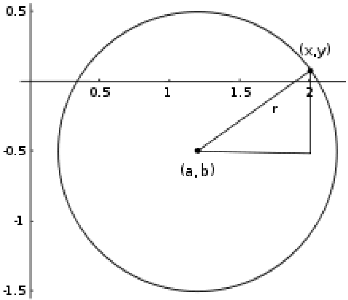
r-sugarú "gömb"

Definíció.

Legyen adott a $C \epsilon \mathbb{R}^2$ *pont,* $C = (a, b)$*, és az* $r > 0$ *valós szám.*

A C *pont körüli* r*-sugarú gömböt így definiáljuk:*

$$S(C, r) = \{P \epsilon \mathbb{R}^2 : \overline{PC} < r\}.$$



Egy körlemezt kapunk C középponttal.

Pontsorozat a síkon

Definíció.

Pontsorozat alatt síkbeli pontok sorozatát értjük:

$$P_n = (x_n, y_n), \qquad n = 1, 2 \ldots$$

1. *Példa.* Két pontsorozat:

$$P_n^{(1)} = (n, n^2), \qquad P_n^{(2)} = ((-1)^n, 2).$$

Megjegyzés: A sorozat tagjai nem feltétlenül különböznek.

Pontsorozat korlátossága

Definíció.

A (P_n) sorozat korlátos, ha létezik egy olyan $S(C, r)$ gömb, amely a sorozat minden elemét tartalmazza.

(P_n) korlátos, ha létezik $C = (a, b)$ és $r > 0$:

$$\sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < r \qquad \forall P_n = (x_n, y_n).$$

1. *Példa.* (folytatás)

- $P_n^{(1)} = (n, n^2)$ nem korlátos;
- $P_n^{(2)} = ((-1)^n, 2)$ korlátos.

Pontsorozat konvergenciája

Definíció.

A $(P_n) \subset \mathbb{R}^2$ *sorozat konvergens és határértéke* $Q \epsilon \mathbb{R}^2$*,ha*

$$\lim_{n \to \infty} \|P_n - Q\| = 0. \tag{1}$$

Ezt így jelöljük:

$$\lim_{n \to \infty} P_n = Q.$$

Megjegyzés. Az (1) egyenletben *számsorozat* konvergenciája szerepel.

Pontsorozat konvergenciája

Definíció. (Ekvivalens)

A (P_n) *sorozat konvergens és határértéke Q, ha* $\forall\varepsilon > 0$*-hoz* $\exists N(\varepsilon)$*, hogy minden* $n \geq N(\varepsilon)$ *esetén:*

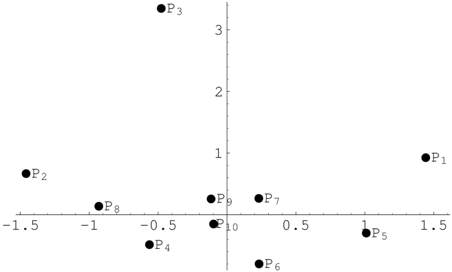
$$\|P_n - Q\| < \varepsilon.$$

Másképp fogalmazva: Minden $\varepsilon > 0$ esetén az $S(Q, \varepsilon)$ gömbön kívül csak véges sok pont van (véges sok indexű).

Következmény. Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos.

Pontsorozat példa

2. *Példa.* Legyen $P_n = (e^{-n/4}\cos(n), e^{-n/4}\sin(n))$, $n \in \mathbb{N}$.



$$\|P_n - (0,0)\| = \|P_n\| = \sqrt{e^{-n/2}\cos^2 n + e^{-n/2}\sin^2 n} =$$

$$= \sqrt{e^{-n/2}} = e^{-n/4} \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} P_n = (0,0).$$

Pontsorozat koordinátái

Állítás. Tekintsük a $P_n = (x_n, y_n)$ elemekből álló sorozatot.

Ekkor az alábbi két állítás ekvivalens:

1. (P_n) konvergens és
$$\lim_{n\to\infty} P_n = Q = (x, y).$$
2. Az (x_n) és (y_n) sorozatok konvergensek és
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x; \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

$(P_n) = ((x_n, y_n))$ konvergenciája. Bizonyítás

1. $\Rightarrow$ 2. A pontsorozat konvergenciája miatt $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N(\varepsilon)$ index, hogy $\|P_n - Q\| < \varepsilon$, ha $n \geq N(\varepsilon)$. Ekkor

$$|x_n - x| < \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon,$$

és hasonlóan $|y_n - y| < \varepsilon$ is teljesül.

2. $\Rightarrow$ 1. $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy $\forall n \geq N$-re:

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \qquad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Ekkor $(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2 < \varepsilon^2$ így

$$\|P_n - Q\| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon.$$

Cauchy-féle feltétel

Definíció.

A (P_n) *sorozat teljesíti a Cauchy-féle feltételt, ha minden* $\forall \varepsilon > 0$*-hoz* $\exists N(\varepsilon)$ *küszöbindex, amelyre* $\forall n, m \geq N$ *esetén*

$$\|P_n - P_m\| < \varepsilon.$$

Állítás. A (P_n) pontsorozat pontosan akkor konvergens, ha teljesíti a Cauchy-féle feltételt.

Cauchy $\Longleftrightarrow$ konvergens

Bizonyítás. $\Longleftarrow$

Tfh a sorozat konvergens. Legyen ε tetszőleges. Akkor $\exists N$ küszöbindex, amelyre

$$\|P_n - P\| < \varepsilon/2 \qquad \forall n \geq N.$$

Ekkor ha $n, m \geq N$, akkor

$$\|P_n - P_m\| < \|P_n - P\| + \|P - P_m\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

A másik irányt nem bizonyítjuk.

Bolzano-Weierstrass tétel $\mathbb{R}^2$-ben

Tétel.

Legyen (P_n) *korlátos pontsorozat a síkon,* $P_n = (x_n, y_n)$*.*

Ekkor van konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Ha (P_n) korlátos, akkor (x_n) és (y_n) is korlátosak.

Ezért létezik (x_n)-nek konvergens részsorozata: (x_{m_k}),

és (y_{m_k})-nak is van konvergens részsorozata: (y_{n_k}).

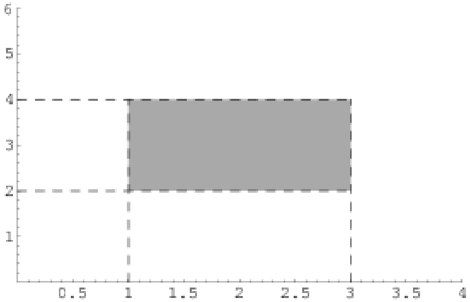
Ekkor (P_{n_k}) konvergens.

Halmazok $\mathbb{R}^2$-ben

$\mathbb{R}^2$ részhalmazait tartományoknak is nevezzük.

Példa. Téglalap. Legyenek $a < b$ és $c < d$ adott valós számok:

$$T = \{(x, y) : \ a \le x \le b, \quad c \le y \le d\} = [a, b] \times [c, d].$$

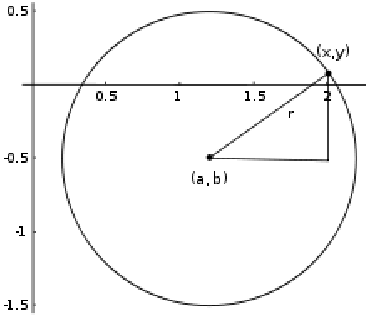


Halmazok $\mathbb{R}^2$-ben

Példa. Gömb. (Ez kétdimenzióban egy körlemeznek felel meg.)

Legyen $r > 0$ valós szám és $C = (a, b) \epsilon \mathbb{R}^2$ síkbeli pont adottak,

$$S(C, r) = \{(x, y) : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r\}.$$



Környezet

Ismétlés. 1-dimenzióban az $a \epsilon \mathbb{R}$ pont környezetei:

$U = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén.

Definíció.

$P = (x, y)$ *pont környezetei* $U = S(P, r) \subset \mathbb{R}^2$

$S \subset \mathbb{R}^2$ tartomány

Definíció.

$Q \epsilon S$ <u>belső pontja</u> S-nek, ha Q-nak $\exists U$ környezete: $U \subset S$.

$Q \epsilon \mathbb{R}^2$ <u>külső pontja</u> S-nek, ha Q-nak $\exists U$ környezete: $U \cap S = \emptyset$.

$Q \epsilon \mathbb{R}^2$ <u>határpontja</u> S-nek, ha Q $\forall U$ környezetére:
$\exists P' \epsilon U \ : \ P' \epsilon S$, $\exists P'' \epsilon U \ : \ P'' \not\epsilon S$.

Következmény.

Tetszőleges S halmaz esetén a sík 3 diszjunkt részre osztható:

$$S = \mathrm{ext}(S) \cup \mathrm{int}(\mathrm{S}) \cup \partial \mathrm{S}.$$

Halmazok $\mathbb{R}^2$-ben

Definíció.

Az S halmaz zárt, ha minden határpontját tartalmazza. S nyílt, ha minden pontja belső pont. Az S halmaz lezárása:

$$\overline{S} = S \cup \partial S.$$

Példa. Az $S(C, r)$ gömb nyílt halmaz. (Miért?)Ennek határpontjai, ill. lezárása:

$$\partial S(C, r) = \{P : \|P - C\| = r\},$$

$$\overline{S(C, r)} = \{P : \|P - C\| \leq r\}.$$

Halmazok $\mathbb{R}^2$-ben

Példa. Legyen $S = \{(x, y) : \ x, y \epsilon \mathbb{Q}\}$. Ekkor $\overline{S} = \mathbb{R}^2$.

Definíció.

*P az S halmaz **torlódási pontja**, ha* $\exists (P_n) \subset S$ *sorozat, melyre* $P_n \neq P$ *és* $\lim\limits_{n \to \infty} P_n = P$.

Torlódási pontok lehetnek belső pontok és határpontok.

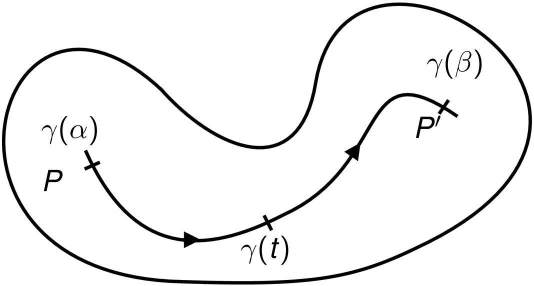
Zárt halmaz minden torlódási pontját tartalmazza.

Folytonos vonal $\mathbb{R}^2$-ben

Definíció.

Legyen $P, P' \epsilon \mathbb{R}^2$. Az ezeket összekötő FOLYTONOS VONAL *egy függvény, melyre*

$$\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(\alpha) = P, \qquad \gamma(\beta) = P'.$$



Folytonos vonal $\mathbb{R}^2$-ben

A $\gamma(t) \epsilon \mathbb{R}^2$ pont koordinátáit jelölje $\gamma(t) =: (x(t), y(t))$.

$$x, y : [\alpha, \beta] \;\to\; \mathbb{R}$$

Tfh az $(x(t), y(t))$ koordináta-függvények folytonosak.

Egy $\{\gamma(t) : t \epsilon [\alpha, \beta]\}$ vonalat is $\mathbb{R}^2$-beli részhalmaznak tekintünk, természetes módon.

Definíció.

$S \subset \mathbb{R}^2$ ÖSSZEFÜGGŐ *, ha bármely két pontját kiválasztva tartalmaz egy őket összekötő folytonos vonalat.*

Szakasz $\mathbb{R}^2$-ben

Definíció.

Legyen $P = (x, y),\ P' = (x', y') \epsilon \mathbb{R}^2$*. A két pontot összekötő* SZAKASZT *az alábbi függvény írja le:*

$$\gamma : [0, 1] \ \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) := P + t(P' - P).$$

Speciálisan tehát $\gamma(0) = P$*,* $\gamma(1) = P'$*.*

Definíció.

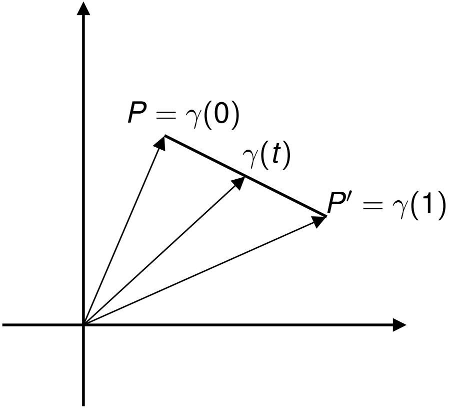
Az $S \subset \mathbb{R}^2$ *tartományt* KONVEX*nek nevezzük, ha bármely két pontjával együtt az őket összekötő szakaszt is tartalmazza.*

Szakasz $\mathbb{R}^2$-ben: $\gamma(t) := P + t(P' - P)$

A szakasz is folytonos vonal, az alábbi

koordináta-függvényekkel:

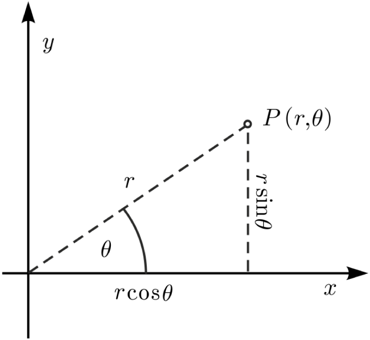
$$x(t) = x + t(x' - x), \qquad y(t) = y + t(y' - y).$$



Definíció.

Egy $(x, y)\epsilon\mathbb{R}^2$ *pont polárkoordinátái* (r, θ)*, melyek:*

- r*: a pont origótól vett távolsága,* $r\epsilon\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
- θ*: az origóból a pontba mutató vektornak az x tengely pozitív részével bezárt szöge,* $\theta\epsilon[0, 2\pi)$*.*



Ha r és θ adottak, akkor

$$x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta).$$

A hozzárendelés egy-egy-értelmű, kivéve a $(0, 0)$ pontot.

Kétváltozós függvények

Függvény megadása

Példa. Téglalap területe. $T = x \cdot y$. $T = T(x, y)$.

Példa. Mozgási energia. $E = \frac{1}{2}mv^2$. $E = E(m, v)$.

Adott $S \subset \mathbb{R}^2$ tartomány. $f: \ S \ \to \ \mathbb{R}$

$$f : (x, y) \mapsto u, \qquad (x, y) \epsilon S.$$

$$\boxed{u = f(x, y)}$$

(x, y): független változók, u: függő változó.

Példa. $u = \sin(xy)$ vagy $u = \ln(y^2 + \cos(x/2))$. ...

Legegyszerűbb példák

1. *Lineáris függvény.* $f(x,y) = ax + by + c$, $D_f = \mathbb{R}^2$.
2. *Másodfokú polinom.*

$$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + e_0, \quad D_f = \mathbb{R}^2.$$

3. *Polinom* = monomiálok összege.

Egy monomiál: $a_{mn}x^m y^n$. Együtthatója $a_{mn} \in \mathbb{R}$, foka: $m + n$.

Polinom foka =

Egy polinom *homogén*, ha a monomiálok foka ugyanaz.

Például homogén másodfokú polinom

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2.$$

Geometriai reprezentáció

Egyváltozós függvény $\approx$ görbe két dimenzióban

Kétváltozós függvény $\approx$ felület három dimenzióban

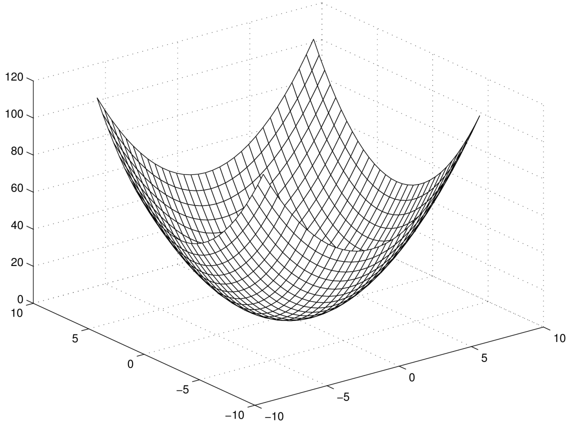
Az $f : S \to \mathbb{R}$ függvényt a térben az (x, y, u) számhármasok írják le, ahol $u = f(x, y)$. Az

$$\{(x, y, u) : \; u = f(x, y), \; (x, y) \epsilon S\}$$

pontok felületet alkotnak a térben.

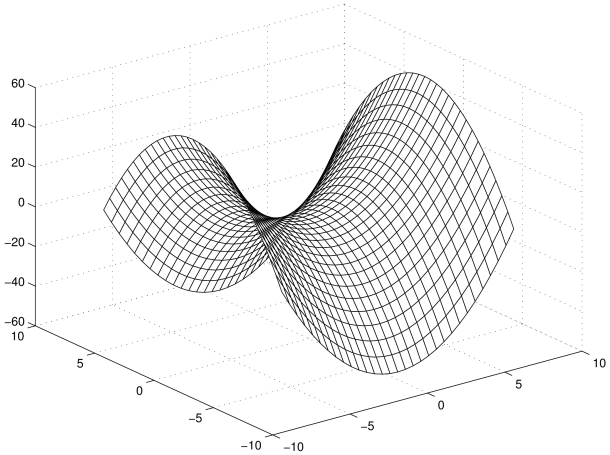
Példa felületre

Legyen $f(x, y) = x^2 + y^2$. A felület egy darabja:



Példa felületre

Legyen $f(x, y) = x^2 - y^2$. A megfelelő felület egy darabja:



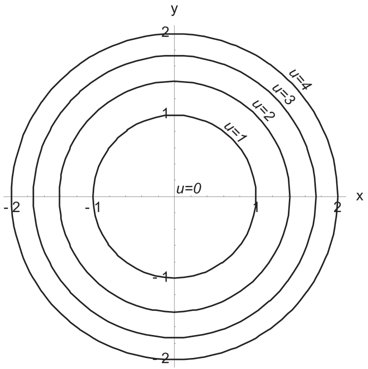
Szintvonalak $\mathbb{R}^2$-ben

A síkban ábrázoljuk azokat az (x, y) pontokat, melyekre

$f(x, y) = k$ rögzített $k \epsilon \mathbb{R}$-ra. Ezek a SZINTVONALAK.

Példa. $f(x, y) = x^2 + y^2$. A szintvonalak koncentrikus körök:

$u = x^2 + y^2 = k$



Szintvonalak $\mathbb{R}^2$-ben

Példa. $f(x, y) = x^2 - y^2$. A szintvonalak hiperbolák és egyenesek: $u = x^2 - y^2 = k$