

ANALÍZIS II. Példatár

Többváltozós valós függvények differenciálszámítása.

2010. március

1. fejezet

Feladatok

1.1. Határérték, folytonosság

Határozzuk meg és vázoljuk az alábbi függvények értelmezési tartományát!

$$1.1. f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

$$1.2. f(x, y) = \frac{1}{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$1.3. f(x, y) = \ln(xy)$$

$$1.4. f(x, y) = \operatorname{ctg} \pi(x + y)$$

$$1.5. f(x, y) = \ln(y^2 - 4x + 8)$$

$$1.6. f(x, y) = \ln x - \ln \sin y$$

$$1.7. f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$1.8. f(x, y) = \arcsin \frac{y}{x}$$

$$1.9. f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$$

$$1.10. f(x, y, z) = \arcsin(x + y)$$

Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

$$1.11. \lim_{(x,y) \rightarrow (2,\infty)} \frac{2xy - 1}{y + 1}$$

$$1.12. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}$$

$$1.13. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$1.14. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy + 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

1.16. Vizsgáljuk meg az alábbi függvény megadott helyen vett határértékét és ismételt határértékeit az adott pontban!

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,\infty)} x \cdot \cos y$$

1.17. Folytonos-e az origóban az alábbi függvény:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy - x + y}{xy + x + y} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1.18. Hol folytonos az alábbi függvény:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1.2. Parciális deriválás

Számítsuk ki az alábbi függvények x és y szerinti parciális deriváltjait:

1.19. $f(x, y) = x^2 - 5xy + 3y^2 - 6x + 7y + 8$

1.20. $f(x, y) = \operatorname{tg}(3x - 5y)$

1.21. $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}$

1.22. $f(x, y) = \frac{xy}{x+y}$

1.23. $f(x, y) = \sin\left(\frac{x}{1+y}\right)$

1.24. $f(x, y) = \ln \sqrt{x^7 y^4}$

1.25. $f(x, y) = \arcsin \sqrt{xy}$

1.26. $f(x, y) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$

1.27. $f(x, y) = e^{x-3y}$.

Igazoljuk, hogy f eleget tesz az $f'_x - 3f'_y = 0$ transzport egyenletnek.

Számítsuk ki a következő függvények parciális deriváltjainak adott pontbeli értékét!

1.28. $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2; (x, y) = (1, -2)$

1.29. $f(x, y) = \arccos \frac{x}{y}; (x, y) = (1, 2)$

1.30. $f(x, y) = \operatorname{tg} xy; (x, y) = (2, \frac{\pi}{8})$

1.31. $f(x, y) = \ln(3x + y^2); (x, y) = (2, 0)$

1.32. $f(x, y) = e(\sqrt[3]{x}) + \sqrt[3]{y}; (x, y) = (1, 8)$

Deriváljuk x és y szerint az alábbi implicit függvényeket:

1.33. $x + y + z = 1$

1.34. $2xz + 6yz + 5z^2 + 12 = 0$

1.35. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$

1.36. $e^{x+y+2z} = 3x + 7y + 11z$

1.37. $e^{x+y+z} = x + 2y + 3z$

1.3. Érintősík

Írjuk fel az alábbi felületek érintősíkjaiknak egyenletét a megadott pontban!

1.38. $f(x, y) = 5x^2 - 2xy + 3y^2 + 5x - 6$; $(x_0, y_0) = (1, -1)$

1.39. $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}$; $(x_0, y_0) = (1, 2)$

1.40. $f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln(xy)$; $(x_0, y_0) = (2, \frac{1}{2})$

1.41. $f(x, y) = x \operatorname{tg} y - y \operatorname{tg} x$; $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{4}, 0)$

1.42. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely a $P(2, -1, 3)$ ponton halad át, és párhuzamos a $z = \cos(x^2 + y^2)$ felület $(x_0, y_0) = (\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2})$ koordinátájú pontjához tartozó érintősíkkal.

1.43. Az $f(x, y) = \ln(xy)$ felületnek mely pontjaiban párhuzamos az érintősík az $x + y + z = 0$ síkkal?

1.44. A $z = x^2 - 2xy + 3y^2 - 5x + 3y - 5$ felület mely pontjaiban vízszintes az érintősík?

1.4. Iránymenti derivált

Határozzuk meg az alábbi függvények adott α iránymenti deriváltjait!

1.45. $f(x, y) = e^{x+y^2}$; $\alpha = 45^\circ$

1.46.a. $f(x, y) = y^2 e^x + \cos(x + y)$; $\alpha = 135^\circ$

1.46.b. $f(x, y) = x \sin y + y \cos x$; $\alpha = 120^\circ$

1.47. $f(x, y) = e^y \ln x - x e^x$; $\alpha = 30^\circ$

Számítsuk ki az alábbi függvények adott irány szerinti deriváltjait a megadott pontban!

1.48. $f(x, y) = x^3 - 5xy^2 + y^2 - 2x + 1$; $\alpha = 40^\circ$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$

1.49. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\alpha = 135^\circ$, $(x_0, y_0) = (-5, 5)$

$$1.50. f(x, y) = x^2 + y^2; \alpha = 60^\circ, (x_0, y_0) = (\sqrt{3}, -1)$$

$$1.51. f(x, y) = \sin(xy); \alpha = 150^\circ, (x_0, y_0) = \left(\frac{1}{4}, \pi\right)$$

$$1.52. f(x, y) = x^3 + 3xy + y^2; \alpha = 60^\circ, (x_0, y_0) = (1, 1)$$

Számítsuk ki az alábbi függvények mind a négy másodrendű parciális deriváltját!

$$1.53. f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$1.54. f(x, y) = \sqrt{x^3} + \sqrt{y^3}$$

$$1.55. f(x, y) = \arctg \frac{x+y}{1-xy}$$

$$1.56. f(x, y) = y - x \cdot e^y + x$$

$$1.57. f(x, y) = x \cdot \sin(x+y) + y \cdot \sin(x+y)$$

$$1.58. f(x, y) = e^{xy}$$

Igazoljuk, hogy a következő függvények harmonikusak, vagyis kielégítik az $f''_{xx} + f''_{yy} = 0$ másodrendű parciális differenciálegyenletet!

$$1.59. f(x, y) = e^x \cos y$$

$$1.60. f(x, y) = \arctg \frac{y}{x}$$

$$1.61. f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

1.5. Taylor polinom

Írjuk fel az alábbi kétváltozós függvények P_0 pont körül vett másodrendű Taylor polinomját!

$$1.62. f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}; P_0(1, 3)$$

$$1.63. f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}; P_0\left(1, \frac{1}{2}\right)$$

$$1.64. f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5; P_0(1, -2)$$

$$1.65. f(x, y) = x^y; P_0(1, 1)$$

1.6. Szélsőérték magasabb dimenzióban

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvényeknek hol lehet lokális szélsőértéke! Ha létezik, maximum, vagy minimum?

1.66. $f(x, y) = x^2 + y^2$

1.67. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - y + 5$

1.68. $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$

1.69. $f(x, y) = (x + 1)^2 + 4(y - 3)^2$

1.70. $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2 - 1$

1.71. $f(x, y) = 4x^2 + 2xy - 5y^2 + 2$

1.72. $f(x, y) = x^2y^3(6 - x - y)$

1.73. $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

1.74. Az $f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ függvényt tekintjük az

$$\{(x, y) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]\}$$

négyszögben.

1.75. $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

1.7. Szöveges szélsőérték feladatok

1.76. Egy bádoggal egymásra helyezett hengerből és kúpból áll. Térfogata V . Milyenek válasszuk a méreteket, hogy elkészítéséhez a legkevesebb bádogot használjuk?

1.77. 12-t osszuk három részre úgy, hogy a három szám szorzata maximális legyen!

1.78. Egy derékszögű hasáb egy csúcsába összefutó éleinek összege 45cm. Hogyan kell az éleket megválasztani, hogy a hasáb térfogata maximális legyen?

1.79. Egy R sugarú körből maximális területű háromszöget kell kivágni. Mekkora a háromszög oldalai?

1.80. 18-at osszuk fel három részre úgy, hogy az első rész négyzetének, a második köbének, és a harmadiknak a szorzata maximális legyen!

1.8. Feltételes szélsőérték

Határozzuk meg az adott kétváltozós függvényeknek előírt feltételek mellett vett feltételes szélső értékeit!

1.81. $f(x, y) = xy$, feltétel: $x + y - 1 = 0$.

1.82. $f(x, y) = x^2 + y^2$, feltétel: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

1.83. $f(x, y) = x^2 - y^2$, feltétel: $3x + 2y + 5 = 0$.

1.84. $f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$, feltétel: $x - y = \frac{\pi}{4}$.

1.9. Abszolút szélsőérték

Írjuk fel az összetett függvényeket, és számoljuk ki a deriváltját (derváltjait)

1.85. Határozza meg az $f(x, y) = \sin(xy)$ függvény maximumát a

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

tartományon!

1.86. Határozza meg az $f(x, y) = \cos(xy)$ függvény szélsőértékeit a

$$D = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$$

tartományon!

1.87. Határozza meg az $f(x, y) = 4x - 6y$ függvény maximumát a

$$D = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$$

tartományon!

1.88. Határozza meg az $f(x, y) = e^{xy}$ függvény maximumát a

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

tartományon!

1.89. Határozza meg az $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ függvény szélsőértékeit

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$$

zárt téglalap tartományon!

1.10. Láncszabály

Írjuk fel az összetett függvényeket, és számoljuk ki a deriváltját (derváltjait)

1.90. $f(x, y) = x^2y^3$, $x = 1 + \sqrt{t}$, $y = 1 - \sqrt{t}$.

1.91. $f(x, y) = xe^{x/y}$, $x = \cos(t)$, $y = e^{2t}$.

1.92. $f(x, y) = \ln(x + y^2)$, $x = 1 + \sqrt{t}$, $y = 1 + \sqrt{t}$.

1.93. $f(x, y, z) = xy^2z^3$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = e^{-3t}$.

2. fejezet

Megoldások

1.1. Határérték, folytonosság

1.1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$

1.2. A sík összes pontjai, az $x^2 + y^2 = R^2$ kör pontjai kivételével.

1.3. Az első, és harmadik síknegyed pontjai, az x és y tengely pontjai azonban nem.

1.4. A sík összes pontjai, kivéve azokat a pontokat, melyre $x + y = n$, ahol n egész szám.

1.5. $y^2 > 4x - 8$.

1.6. $x > 0$ és $2n\pi < y < 2(n+1)\pi$, (n egész szám).

1.7. $x^2 + y^2 \leq 1$.

1.8. $|x| \geq |y|$, de $x \neq 0$.

1.9. $2k\pi \leq x^2 + y^2 \leq (2k+1)\pi$, ($k = 0, 1, 2, \dots$).

1.10. Két egyenes közti sáv: $-1 - x \leq y \leq 1 - x$.

1.11. Minden véges $y \neq 0$ -ra

$$\frac{2xy - 1}{y + 1} = \frac{2x - \frac{1}{y}}{1 + \frac{1}{y}},$$

és így ha $x \rightarrow 2$ és $y \rightarrow \infty$, akkor $f(x, y) \rightarrow 4$.

1.12. A határérték nem létezik.

1.13. 0.

1.14. 1.

1.15. Mivel

$$|f(x, y)| = \left| x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \right| \leq \left| x \sin \frac{1}{y} \right| + \left| y \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| + |y|$$

ezért

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0.$$

Az ismételt határértékek azonban nem léteznek, ugyanis a

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\sin \frac{1}{y} \right)$$

határérték nem létezik. Ezért sem a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right),$$

sem a másik ismételt határérték nem létezik.

1.16. Mivel $|\cos y| \leq 1$, tehát korlátos, és $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ és

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,\infty)} x \cdot \cos y = 0.$$

Mivel $\lim_{y \rightarrow \infty} x \cdot \cos y$ nem létezik, ezért a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow \infty} x \cdot \cos y$$

határérték sem létezik, viszont

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos y = \lim_{y \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

1.17. Mivel $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 1$, ha $y \neq 0$, ezért

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 1.$$

Hasonlóan

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = -1.$$

A $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ határérték nem létezik, ugyanis a függvénynek más a határértéke, ha az x tengely mentén, vagy ha az y tengely mentén tartunk az origóhoz.

Tehát a függvény az origóban nem folytonos.

1.18. A függvény az origón kívül folytonos, hisz folytonos függvények kompozíciója.

Bár teljesül, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0,$$

mégis a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

határérték nem létezik. Ugyanis az $x = t \cdot \cos \alpha$, $y = t \cdot \sin \alpha$ félegyenesek mentén

$$f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = \frac{2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \sin 2\alpha,$$

α -tól függő állandó. Ezért egy α irányú egyenes mentén a határérték is $\sin 2\alpha$, és ez α -val együtt változik. A fenti határérték α -tól függően más és más értékű.

Tehát a függvény az origóban nem folytonos.

1.2. Parciális deriválás

$$1.19. f'_x(x, y) = 2x - 5y - 6 \text{ és } f'_y(x, y) = -5x + 6y + 7.$$

$$1.20. f'_x(x, y) = \frac{3}{\cos^2(3x - 5y)} \text{ és } f'_y(x, y) = \frac{-5}{\cos^2(3x - 5y)}.$$

$$1.21. f'_x(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} \text{ és } f'_y(x, y) = \frac{-x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}.$$

$$1.22. f'_x(x, y) = \left(\frac{y}{x+y}\right)^2 \text{ és } f'_y(x, y) = \left(\frac{x}{x+y}\right)^2.$$

$$1.23. f'_x(x, y) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \frac{1}{1+y} \text{ és } f'_y(x, y) = -\cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \frac{x}{1+y^2}.$$

$$1.24. f'_x(x, y) = \frac{7}{2x} \text{ és } f'_y(x, y) = \frac{2}{y}.$$

$$1.25. f'_x(x, y) = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x(1-xy)}} \text{ és } f'_y(x, y) = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x(1-xy)}}.$$

$$1.26. f'_x(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \text{ és } f'_y(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

1.27.

$$1.28. f'_x(1, -2) = -4 \text{ és } f'_y(1, -2) = -1.$$

$$1.29. f'_x(1, 2) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0,5777 \text{ és } f'_y(1, 2) = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0,289.$$

$$1.30. f'_x\left(2, \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{4} = 0,785 \text{ és } f'_y\left(2, \frac{\pi}{8}\right) = 4.$$

$$1.31. f'_x(2, 0) = \frac{1}{2} \text{ és } f'_y(2, 0) = 0.$$

$$1.32. f'_x(1, 8) = \frac{e}{3} = 0,906 \text{ és } f'_y(1, 8) = \frac{e}{12} = 0,227.$$

$$1.33. f'_x(x, y) = -1 \text{ és } f'_y(x, y) = -1.$$

$$1.34. f'_x(x, y) = -\frac{z}{x+3y+5z} \text{ és } f'_y(x, y) = -\frac{3z}{x+3y+5z}.$$

$$1.35. f'_x(x, y) = -\frac{x(x^2 + y^2 + z^2 - 1)}{z(x^2 + y^2 + z^2 - 3)} \text{ és } f'_y(x, y) = -\frac{y(x^2 + y^2 + z^2 - 2)}{z(x^2 + y^2 + z^2 - 3)}.$$

$$1.36. f'_x(x, y) = -\frac{e^{x+y+2z} - 3}{2e^{x+y+2z} - 11} \text{ és } f'_y(x, y) = -\frac{e^{x+y+2z} - 7}{2e^{x+y+2z} - 11}.$$

$$1.37. f'_x(x, y) = -\frac{e^{x+y+z} - 1}{e^{x+y+z} - 3} \text{ és } f'_y(x, y) = -\frac{e^{x+y+z} - 2}{e^{x+y+z} - 3}.$$

1.3. Érintősík

$$1.38. 17x - 8y - z = 16$$

$$1.39. 2x - y - 2\sqrt{3}z + \frac{\pi}{\sqrt{3}} = 0$$

$$1.40. 17x + 68y - 8z = 68$$

$$1.41. z - \left(\frac{\pi}{4} - 1\right)y = 0$$

$$1.42. \sqrt{\pi}x + \sqrt{\pi}y - (\sqrt{\pi} + 3) = 0$$

$$1.43. x = y = -1$$

$$1.44. x = 3, y = \frac{1}{2}$$

1.4. Iránymenti derivált

$$1.45. f'_\alpha(x, y) = \sqrt{2} \cdot e^{x+y^2} \left(\frac{1}{2} + y\right)$$

$$1.46.a. f'_\alpha(x, y) = -\sqrt{2} \cdot y \cdot e^x \left(1 - \frac{y}{2}\right)$$

$$1.46.b. f'_\alpha(x, y) = \frac{1}{2}(y \cdot \sin x - \sin y) + \frac{\sqrt{3}}{2}(x \cdot \cos y + \cos x)$$

$$1.47. f'_\alpha(x, y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{1}{x} \cdot e^y - (x+1)e^x\right] + \frac{1}{2} \cdot e^y \cdot \ln x$$

$$1.48. f'_\alpha(1, 0) = \cos 40^\circ = 0,766$$

$$1.49. f'_\alpha(-5, 5) = 1$$

$$1.50. f'_\alpha(3, -1) = 0$$

$$1.51. f'_\alpha\left(\frac{1}{4}, \pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{16} - \frac{\pi\sqrt{6}}{4} = -1,835$$

$$1.52. f'_\alpha(1, 1) = \sqrt{3}(\sqrt{3} + 2.5) = 7.33$$

$$1.53. f''_{xx}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, f''_{yy}(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$1.54. f''_{xx}(x, y) = \frac{3}{4\sqrt{x}}, f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 0, f''_{yy}(x, y) = \frac{3}{4\sqrt{y}}$$

$$1.55. f''_{xx}(x, y) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 0, f''_{yy}(x, y) = \frac{-2y}{(1+x^2)^2}$$

$$1.56. f''_{xx}(x, y) = 0, f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = -e^y, f''_{yy}(x, y) = -x \cdot e^y$$

$$1.57. f''_{xx}(x, y) = f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = f''_{yy}(x, y) = 2 \cdot \cos(x+y) - (x+y) \sin(x+y)$$

$$1.58. f''_{xx}(x, y) = y^2 \cdot e^{xy}, f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = (1+xy)e^{xy}, f''_{yy}(x, y) = x^2 \cdot e^{xy}$$

1.5. Taylor polinom

1.62.

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= \sqrt{10} + \frac{1}{\sqrt{10}}[(x-1) + 3(y-3)] + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10\sqrt{10}}[9(x-1)^2 - 6(x-1)(y-3) + (y-3)^2]. \end{aligned}$$

1.63.

$$T_2(x, y) = e^{-5/4} \left(1 - 2(x-1) - (y - \frac{1}{2}) + 2(x-1)^2 + 4(x-1)(y - \frac{1}{2}) - (y - \frac{1}{2})^2 \right).$$

$$1.64. T_2(x, y) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2$$

$$1.65. T_2(x, y) = 1 + (x-1) + (x+1)(y-1)$$

1.6. Szélsőérték magasabb dimenzióban

1.66. A $P(0, 0)$ pontban minimum van.

1.67. A $P(-\frac{7}{3}, \frac{5}{3})$ pontban minimum van.

1.68. A $P(-1, -1)$ pontban maximum van, a $P(0, 0)$ pontban nincs szélsőérték.

1.69. A $P(-1, 3)$ pontban minimum van.

1.70. Nincs szélsőérték.

1.71. Nincs szélsőérték.

1.72. A $P(2, 3)$ pontban maximum van.

1.73. A $P(1, 1)$ és $P(-1, -1)$ pontokban minimum van, a $P(0, 0)$ pontban nincs szélsőérték.

1.74. A $P(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ pontban maximum van.

1.75. A $P(0, 0)$ pontban minimum van.

1.76.

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi(\sqrt{5} + 3)}} = 0,567\sqrt[3]{V},$$

$$m_{henger} = 0,821\sqrt[3]{V}, \quad m_{kup} = 0,507\sqrt[3]{V}.$$

1.77. 4, 4, 4

1.78. 15, 15, 15

1.79. $a = \sqrt{3}R$.

1.80. 6, 9, 3

1.7. Feltételes szélsőérték

1.81. $x = y = \frac{1}{2}$.

1.82. $x = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}; y = \frac{a^2b}{a^2 + b^2}$.

1.83. $x = -3; y = 2$.

1.84. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; y = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k = \pm 1, \pm 2, \dots$

1.8. Abszolút szélsőérték

1.85. Minimum értéke $-\sin(1/2)$, maximum értéke $\sin(1/2)$.

1.86.

1.87.

1.89. Minimum értéke 0, maximum értéke 9.