Analízis II.

12. hét

Témák:

- Lineáris DER
- Komplex függvények értelmezése, kanonikus alakja
- Komplex függvény deriváltja
- Harmonikus függvény
- Logaritmus, hatvány
- Komplex vonalintegrál

Órai feladatok:

Lineáris differenciálegyenlet rendszer

1. **Tankönyv 161. oldalán szereplő példa**:

$$\begin{array}{rcl} y_1' & = & y_1 \\ y_2' & = & y_2 + y_3 \\ y_3' & = & 3y_3 \end{array} \qquad \Longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

A megoldás. Határozzuk meg A sajátértékeit:

$$0 = |A - \lambda I| = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix},$$

ahonnan azt kapjuk, hogy a sajátértékek $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 3.$

A sajátvektorok meghatározása. Ha $\lambda_1 = 1$, akkor meg kell oldani az alábbi egyenletet

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0.$$

Ebből $c = 0$, illetve a és b tetszőlegesek. Létezik λ_1-hez két ortogonális sajátvektor:

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tekintsük most a $\lambda_3 = 3$ sajátértéket. A megoldandó egyenlet:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0.$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$-2a = 0, \qquad -2b + c = 0, \qquad \Longrightarrow \quad s_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tehát a lineáris rendszer alapmegoldásai

$$Y_1 = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Y_2 = e^x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Y_3 = e^{3x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Így az általános megoldás:

$$Y = \begin{pmatrix} c_1 e^x \\ c_2 e^x + c_3 e^{3x} \\ 2c_3 e^{3x} \end{pmatrix}, \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} y_1(x) & = & c_1 e^x \\ y_2(x) & = & c_2 e^x + c_3 e^{3x} \\ y_3(x) & = & 2c_3 e^{3x}. \end{array}$$

2. Oldjuk meg az alábbi DER-t, a megadott kezdeti feltétel mellett:

$$\begin{array}{rcl} y_1' & = & y_1 \\ y_2' & = & y_2 + y_3 \\ y_3' & = & 3y_3 \end{array}$$

$$y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = -4, \quad y_3(0) = -4.$$

Komplex függvények értelmezése, kanonikus alakja

3. Írjuk fel az alábbi függvény kanonikus alakját. $f(z) = z^2$

   'Ábrázoljuk' ezt a függvényt: állapítsuk meg, hogy a megadott tartományokat a függvény mely tartomámyba viszi. Készítsünk ábrát, ahol lehet.

(a) Pozitív síknegyed: $D_1 = \{z = x + iy \ : \ x > 0\,, y > 0\}$.

(b) Felső félsík: $D_2 = \{z \ : \ \operatorname{Im} z > 0\}$.

(c) $D_3 = \{z = iy \ : \ 0 < y < 1\}$.

4. Írjuk fel az $f(z) = z^2$ függvény kanonikus alakját és ábrázoljuk az adott tartományokat és ezek képeit a komplex számsíkon:

   (a) $f(z) = \dfrac{1}{z}$, és a $D = \{z \ : \ 0 < \operatorname{Re}(z)\}$ tartomány.

   (b) $f(z) = (-1 + i)z$, és a $D = \{z : |z| < 1\}$ tartomány.

   (c) $f(z) = (1 + i)z$, és a $D = \{z : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ tartomány.

Komplex függvények differenciálhatósága

5. Deriválhatók-e az alábbi függvények? (Cauchy-Riemann egyenleteket kell leellenőrizni.)

   (a) $f(z) = (z - 1)^2$;

   (b) $f(z) = 2x + i\ xy^2$;

   (c) $f(z) = \dfrac{z}{\bar{z}}$.

   (d) $f(z) = e^z$.

Harmonikus függvény, harmonikus társ

6. Harmonikusak-e az alábbi függvények? Ha igen, keressük meg a harmonikus társát és írjuk fel az $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ differenciálható komplex függvényt!

   (a) $u(x, y) = 2x(1 - y)$;

   (b) $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^3$;

7. Van-e olyan analitikus függvény, melynek valós része:

$$u(x, y) = \ln(x^2 + y^2), \qquad (x, y) \neq (0, 0).$$

   Ha igen, adjuk meg a függvény deriváltját a $z = i$ pontban ANÉLKÜL, hogy harmonikus társát meghatározzuk.

Logaritmus és hatvány értelmezése.

8. $\ln(-i) = ?$

9. $\ln(-1) = ?$ (Figyelem: valós függvényként ennek nincs értelme!)

10. $f(z) = \ln(z)$. A $\mathbb{C} \setminus \{iy : y \leq 0\}$ tartománynak mi a képe?

11. $(-1)^i = ?$

Komplex vonalintegrál (Esetleg kimaradhat.)

12. A Jegyzet 181. oldalán 1. és 2. Példa

13. Legyen Γ a $4i$ pontból az $5 + i$-be vezető egyenes szakasz. Mennyi

$$\int_\Gamma 2\bar{z} dz = ?$$

14. Γ a komplex egységkör. Határozzuk meg az alábbi integrál értékét:

$$\oint_\Gamma z(e^z + \bar{z})\, dz.$$

15. A Cauchy - féle integrálformula alapján határozzuk meg az alábbi integrálok értékét:

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1}\, dz = ?, \qquad \oint_{|z-i|=2} \frac{\sin(z)}{z-i}\, dz = ?$$