Analízis II.

11. hét

Témák:

- FT második fele. Konvolúció
- Elsőrendű differenciálegyenletek (ismétlés)
- Állandó együtthatós homogén lineáris DE megoldása
- Inhomogén lineáris differenciálegyenlet

Órai feladatok:

FT második fele. Konvolúció

1. Határozzuk meg - az ismert Fourier-transzformáltak és a Fourier-transzformáció tulajdonságai alapján - az alábbi függvények Fourier-transzformáltját:

   a) $f(x) = x \cdot e^{-|x|}$

   b) $f(x) = e^{-9(x-4)^2}$.

2. *(Tartalék)* Adott két valós függvény, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mindkettő abszolút integrálható. Igazoljuk, hogy a konvolúció kommutatív: $f * g = g * f$.

3. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

   Mi lesz $f * g$ egy tetszőleges g abszolút integrálható függvényre? Rajzban is mutassuk meg. (Nagyon hasonló szerepel a videóban.)

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek (ism.)

- Általános megoldás? $y' = ay$, ahol $a \epsilon \mathbb{R}$ adott konstans.
- Kezdeti érék feladat megoldása? $y' = 2y, \qquad y(0) = 2.$
- Kezdetiérték feladat megoldása? $y' = 2y + x$, és $y(0) = 1$.

Állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletek

4. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet, mi lesz az általános megoldás?

$$y'' + 2y' - 15y = 0.$$

5. Oldjuk meg a LDE-t a megadott *kezdetiérték*ekkel, majd a megadott *peremfeltétel*ekkel:

$$y'' + 4y' + 3y = 0, \qquad y(0) = 2,\ y'(0) = 1.$$

$$y'' + 4y' + 3y = 0, \qquad y(0) = 2,\ y(1) = 1.$$

(Mi a különbség a kezdetiérték és peremérték között?)

6. Oldjuk meg a LDE-t:

$$(a) \quad y''' + y'' - 12y' = 0 \qquad (b) \quad \textit{(Tartalék)} \quad y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$$

7. Oldjuk meg a LDE-t a megadott kezdetiértékekkel:

$$y''' + y'' - 12y' = 0, \qquad y(0) = 1,\ y(1) = 1,\ y(-1) = 1.$$

8. *(A karakterisztikus polinomnak komplex gyökei vannak)* Oldjuk meg a LDE-t:

$$y'' + 4y = 0$$

9. (*A karakterisztikus polinomnak komplex gyökei vannak*) Oldjuk meg a LDE-t a megadott peremfeltételekkel:

$$y'' + 6y' + 10y = 0, \qquad y(1) = 1,\ y(0) = 1.$$

Állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenletek

(*1. Állandók variálása, 148. oldal a jegyzetben*)

Pl. Harmonikus rezgés másodrendű egyenlete

$$y'' + k^2 y = f.$$

A homogén egyenlet alapmegoldásai $y_1 = \cos(kx)$ és $y_2 = \sin(kx)$. A megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{pmatrix} \cos(kx) & \sin(kx) \\ -k\sin(kx) & k\cos(kx) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1'(x) \\ \gamma_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Az együttható mátrix, és annak inverze:

$$M = \begin{pmatrix} \cos(kx) & \sin(kx) \\ \\ -k\sin(kx) & k\cos(kx) \end{pmatrix}, \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(kx) & -\frac{1}{k}\sin(kx) \\ \\ \sin(kx) & \frac{1}{k}\cos(kx) \end{pmatrix}.$$

Így az együtthatók deriváltjaira ez adódik:

$$\begin{aligned} \gamma_1'(x) &= -\frac{1}{k}\sin(kx)f(x) \\ \gamma_2'(x) &= \frac{1}{k}\cos(kx)f(x) \end{aligned}$$

.

\+ Speciális esetként: $f(x) = x$ mellett mit kapunk?

(*2. Próbafüggvény módszer.*)

10. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket a próbafüggvény módszerével:

    a) $y'' - y' - 12y = 4x^2 - 6x - 3$

    b) $y'' - 2y' - 3y = 2\cos 3x$

    c) $y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$.

    (Az egyik HF lehet.)

11. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet a próbafüggvény módszerével

    $$y'' - 2y' + y = 6xe^x$$

    a) az $y(0) = 2,\ y'(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett;

    b) az $y(0) = -2,\ y(1) = 0$ peremfeltétel mellett.

    (Az egyik HF lehet.)