# Analízis II.

# 10. hét

**Témák:**

- Tömegközéppont meghatározása, felszín számítás
- Valós függvény vonalintegrálja
- Vektormező vonalintegrálja, potenciálkeresés
- Fourier transzformáció, első rész

**Órai feladatok:**

Tömegközéppont meghatározása, felszín számítás

1. Félgömb alakú test sűrűsége fordítottan arányos a középponttól mért távolsággal, az arányossági tényező $k > 0$. A félgömb sugara $a > 0$. Mekkora a test tömege és hol van a tömegközéppontja?

2. *(Tartalék)* Határozzuk meg az $x^2+y^2 = R^2$ és az $x^2+y^2 = 4R^2$ körök közti körgyűrű $y \geq 0$ félsíkba eső felének tömegközéppontját, ha a sűrűség egyenesen arányos a középponttól mért távolsággal, azaz a sűrűségfüggvény:
$$\varrho(x, y) = k \cdot \sqrt{x^2 + y^2}.$$

3. Tekintsük az egységkör felett az $f(x, y) = xy$ függvényt. Mekkora ennek felszíne?

Valós függvény vonalintegrálja

4. Legyen egy félkör alakú huzal $\Gamma$ az egységkör felső felén, melynek sűrűsége az $x$ tengelytől távolodva lineárisan csökken, (azaz $f(x, y) = k(1 - y)$, $k > 0$ adott paraméter). Mennyi a tömege?

Vektormező vonalintegrálja, potenciálkeresés

5. *(Tartalék)* Számítsuk ki az $F(x,y) = (x^2+y^2,\, y^2-x^2)$ függvény vonalintegrálját a $\Gamma$ görbe mentén, ahol a $\Gamma$ görbe: $\left\{ \frac{y}{2} - \frac{x}{3} = 1, \quad 0 \le x \le 1 \right\}$.

6. Számítsuk ki $F(x,y) = (x^2,\, -y^2)$ vonalintegrálját $\Gamma$mentén, mely az egységkörnek a pozitív síknegyedbe eső része, az $(1;0)$ pontból a $(0;1)$ pont felé irányítva.

7. Potenciálosak-e az alábbi vektormezők?

   a) $F(x,y) = (x-y,\, x-2)$.

   b) $F(x,y) = (3+2xy,\, x^2-3y^2)$.

8. Legyen $F(x,y) = (3+2xy,\, x^2-3y^2)$. (Az előző feladatban igazoltuk, hogy ez a vektormező potenciálos.)

   a) Határozzunk meg egy $f$ primitív függvényt.

   b) Számítsuk ki $F$ vonalintegrálját a $\Gamma$ görbe mentén:

$$\Gamma = \{\gamma(t) = (e^t \cdot \cos t,\, e^t \cdot \sin t) \quad : \ 0 \le t \le \pi\}.$$

Fourier transzformáció

9. Határozzuk meg integrálással az alábbi függvény Fourier-transzformáltját:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

10. Az előző feladat eredményének felhasználásával és a Fourier-transzformáció tulajdonságainak alapján határozzuk meg az alábbi függvény Fourier-transzformáltját:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad 0 < x < 2 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

11. Határozzuk meg integrálással vagy az alaptulajdonságokkal az alábbi függvények Fourier-transzformáltját:

   (a) (háromszögjel)

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{ha } |x| < 1, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

   (b)

$$f(x) = xe^{-|x|}$$