ANALÍZIS II. Példatár

Fourier sorok

2014. február

Feladatok

Tekintsük az alábbi függvényeket. Ahol másképp nem jelezzük, ott a függvény a megadott tartományon kívül 2π szerint periodikus, vagyis $f(x) = f(x + k2\pi)$, $k = \pm 1, \pm 2.....$

Írja el ezek Fourier sorát!

F.1

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & \text{ha} \quad -\pi < x \leq 0 \\ \pi - x, & \text{ha} \quad 0 < x < \pi \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{ha} \quad x = \pm\pi \end{cases}$$

A felírt sor segítségével számítsuk ki az alábbi számsor összegét:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

F.2

$$f(x) = \begin{cases} +1, & \text{ha} \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ -1, & \text{ha} \quad \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2} \\ 0, & \text{ha} \quad x = -\dfrac{\pi}{2}, \ \dfrac{\pi}{2}, \ \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Számítsuk ki az alábbi sor összegét:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + -... = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}.$$

F.3

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{\pi}{2}, & \text{ha} \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{3\pi}{2} - x, & \text{ha} \quad \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{F.4}}$ $f(x) = \dfrac{\text{ch }(x)}{2}$, ha $-\pi \le x \le \pi$.

F.5

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - x, & \text{ha} \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] x - \dfrac{\pi}{2}, & \text{ha} \quad \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi \\[2ex] x - \dfrac{3\pi}{2}, & \text{ha} \quad \pi < x \le \dfrac{3\pi}{2} \\[2ex] \dfrac{3\pi}{2} - x, & \text{ha} \quad \dfrac{3\pi}{2} \le x < 2\pi \\[2ex] 0, \ \text{ha} \quad x = k\pi, \ k = 0, \pm 1 \end{cases}$$

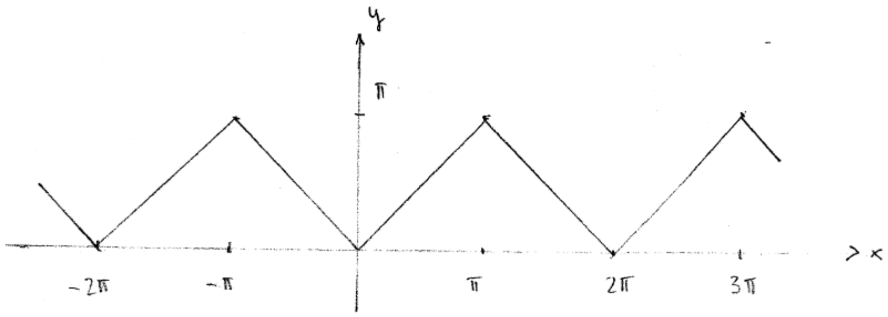
F.6

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad -\dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{\pi}{3} \\[2ex] \dfrac{\pi}{3}, & \text{ha} \quad \dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{2\pi}{3} \\[2ex] \pi - x, & \text{ha} \quad \dfrac{2\pi}{3} \le x \le \dfrac{4\pi}{3} \\[2ex] -\dfrac{\pi}{3}, & \text{ha} \quad \dfrac{4\pi}{3} \le x \le \dfrac{5\pi}{3} \end{cases}$$

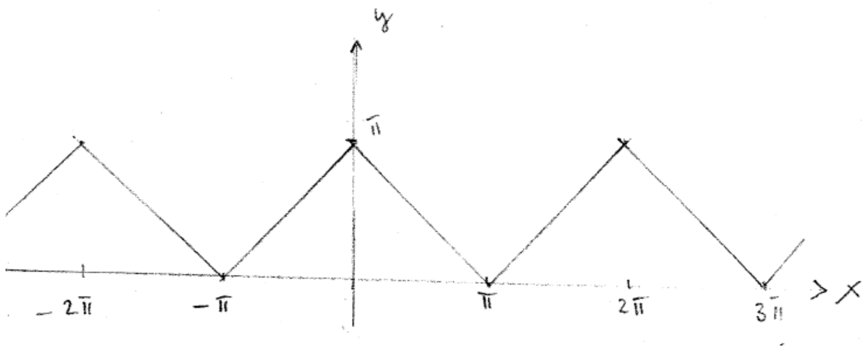
F.7

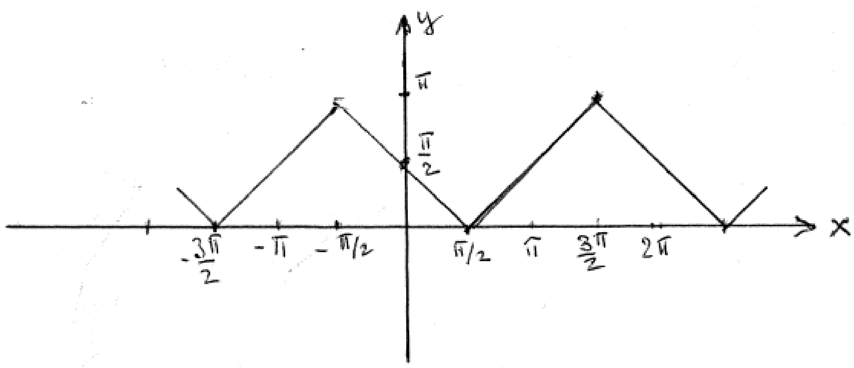
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] \dfrac{\pi}{2}, & \text{ha} \quad \dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{3\pi}{2} \\[2ex] 2\pi - x, & \text{ha} \quad \dfrac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi \end{cases}$$

F.8 Határozzuk meg a görbével megadott függvény Fourier-sorát:

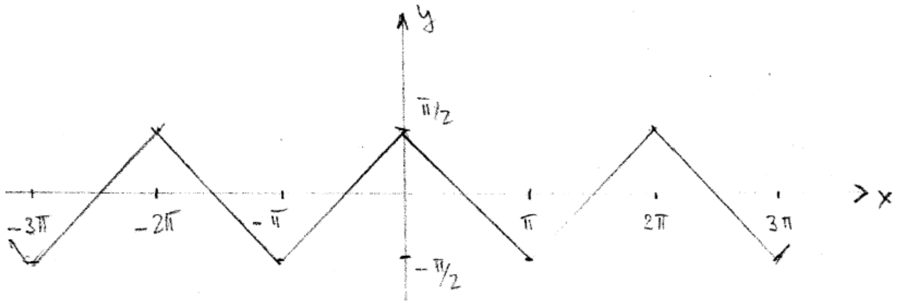


F.9 -F.10 Határozzuk meg a következő példákban görbével megadott függvények Fourier-sorát:

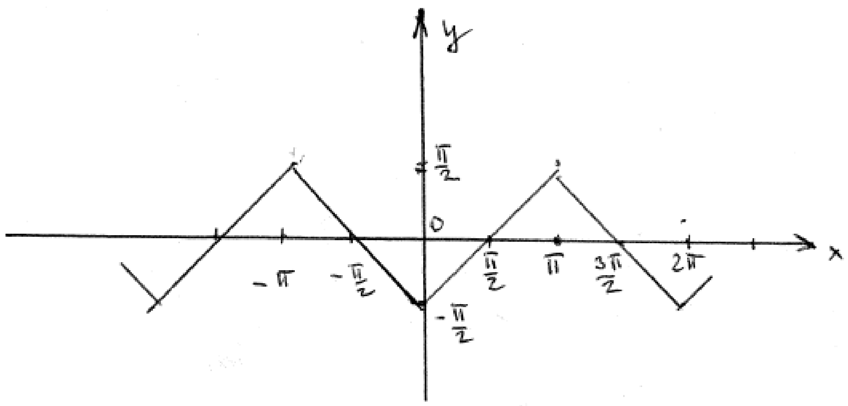




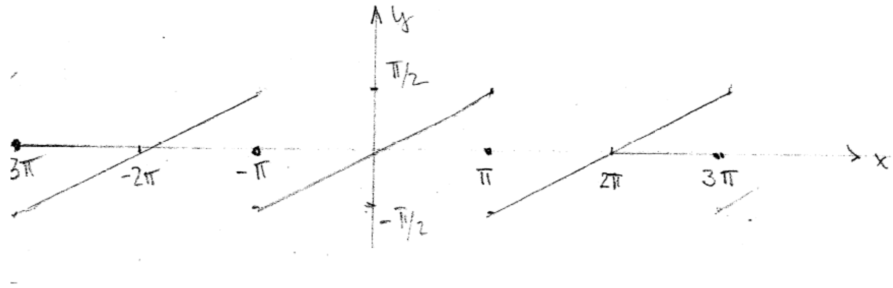
F.11 Határozzuk meg a következő példában görbével megadott függvény Fourier-sorát:



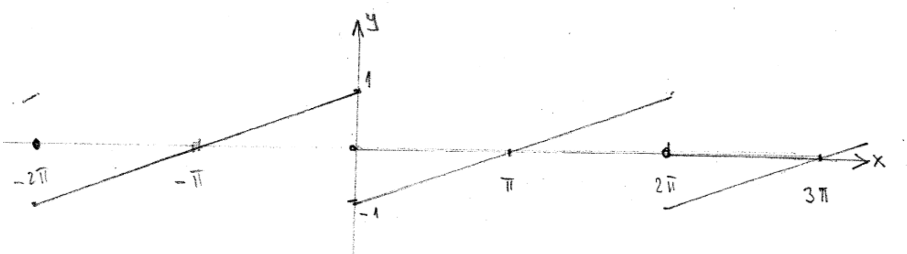
F.12 Határozzuk meg a következő példában görbével megadott függvény Fourier-sorát:



F.13 Határozzuk meg a következő példában görbével megadott függvény Fourier-sorát:



F.14 Határozzuk meg a következő példában görbével megadott függvény Fourier-sorát:



Határozzuk meg a következő példákban adott függvények Fourier-sorát!

(Ahol a függvényeket egy L hosszú intervallumon definiáljuk ott ezután L szerint periodikusan kiterjesztjük - ezt külön nem jelezzük.)

F.15

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}, & \text{ha} \quad -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{x}{2}, & \text{ha} \quad \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

F.16

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}, & \text{ha} \quad -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] \dfrac{x}{2} - \dfrac{3\pi}{4}, & \text{ha} \quad \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

F.17

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{ha} \quad -\pi \leq x \leq -\dfrac{\pi}{2} \\[2ex] -x, & \text{ha} \quad -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] -\dfrac{\pi}{2}, & \text{ha} \quad \dfrac{\pi}{2} \leq x < \pi \\[2ex] 0, & \text{ha} \quad x = \pm\pi \end{cases}$$

F.18

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}, & \text{ha} \quad -\pi \leq x \leq -\dfrac{\pi}{2} \\[2ex] x, & \text{ha} \quad -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] \dfrac{\pi}{2}, & \text{ha} \quad \dfrac{\pi}{2} \leq x < \pi \\[2ex] 0, & \text{ha} \quad x = \pm\pi \end{cases}$$

F.19

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \dfrac{\pi}{2}, & \text{ha} \quad -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \\[2ex] \dfrac{\pi}{2} - 2x, & \text{ha} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] -\dfrac{\pi}{2}, & \text{ha} \quad \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

F.20

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} - 2x, & \text{ha} \quad -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \\[2ex] 2x - \dfrac{\pi}{2}, & \text{ha} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] \dfrac{\pi}{2}, & \text{ha} \quad \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

F.21

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad -\pi \leq x \leq 0 \\[2ex] -x, & \text{ha} \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

F.22

$$f(x) = \begin{cases} x - \dfrac{\pi}{2}, & \text{ha} \quad -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] \dfrac{\pi}{2} - x, & \text{ha} \quad \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

F.23

$$f(x) = x^2, \quad \text{ha} \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

f Fourier-sorából számítsuk ki a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k^2}$ számsor összegét.

F.24

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi}x - 1, & \text{ha} \quad -\pi \le x \le -\dfrac{\pi}{2} \\[2ex] \cos(x), & \text{ha} \quad -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] \dfrac{2}{\pi}x - 1, & \text{ha} \quad \dfrac{-\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$

F.25 $f(x) = \sin^2(x)$

F.26 $f(x) = \cos^2(x)$

F.27 $f(x) = \dfrac{x^3}{9}, \qquad -\pi \le x \le \pi$

F.28 $f(x) = |\sin(x)|$

F.29 $f(x) = |\cos(x)|$

F.30 $f(x) = \sin(\dfrac{x}{2}),\ 0 \le x \le 2\pi$

Általános periódus

Határozzuk meg a következő példákban adott függvények Fourier-sorát! Ezek a függvények nem 2π szerint periodikusak.

$\boxed{\textbf{F.31}}$ $f(x) = x^2,\ -1 \le x \le 1$

$\boxed{\textbf{F.32}}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad -2 < x \le -1 \\[2ex] \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}, & \text{ha} \quad -1 \le x \le 1 \\[2ex] 1 & \text{ha} \quad 1 \le x \le 2 \\[2ex] \dfrac{1}{2}, & \text{ha} \quad x = 4k + 2 \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \end{cases}$$

és $f(x) = f(x+4k), \quad k = \pm1, \pm2, ...$

F.33

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{ha} \quad 0 < x < 4 \\ 1 & \text{ha} \quad x = 4k \end{cases}$$

és $f(x) = f(x+4k), \quad k = \pm1, \pm2, ...$

F.34 $f(x) = -x^2$, ha $-1 \leq x \leq 1$.

F.35

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}-1}{2} & \text{ha} \quad -3 \leq x \leq 0 \\ \dfrac{e^{x}-1}{2} & \text{ha} \quad 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

F.36

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{ha} \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \text{ha} \quad x = (2k+1)\pi \qquad (k = 0, \pm1, \pm2, ...) \end{cases}$$

F.37

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & \text{ha} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & \text{ha} \quad 2 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Megoldások

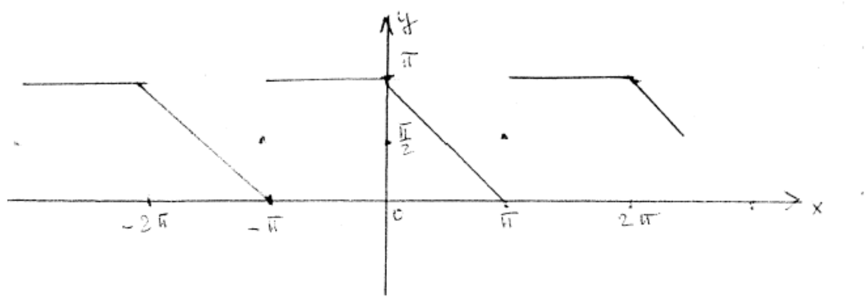
$\boxed{\textbf{F.1}}$ Ismeretes, hogy a 2π szerint periodikus f függvény:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos kx + b_k \cdot \sin kx)$$

Fourier-sorában szereplő együtthatókat az

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x)dx \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} \cos kxdx \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} \sin kxdx \end{aligned}$$

képletek segítségevel számíthatjuk ki, aol $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges rögzített szám. Feladatunkban adott függvényt az ábra szemlélteti.



A függvény egy teljes periódusa pl. a $(-\pi, \pi)$ számközben $(a = -\pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} \pi & \text{ha } -\pi < x \leq 0 \\ \pi - x & \text{ha } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Az együtthatókat két integrál összegeként kapjuk.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\left\{ \int_{-\pi}^{0} \pi dx + \int_0^{\pi} (\pi - x)dx \right\} = \frac{1}{\pi}\left\{ \Big[\pi x\Big]_{-\pi}^{0} + \left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} \right\} = \frac{3}{2}\pi. \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\left\{ \int_{-\pi}^{0} \pi \cos kxdx + \int_0^{\pi} (\pi - x)\cos kxdx \right\} \end{aligned}$$

A második integrálban a parciális integrálás szabályát alkalmazzuk.

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\left\{ \left[\pi \frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{0} + \left[(\pi - x)\frac{\sin kx}{k}dx\right]_0^{\pi} + (-1) \cdot \int_0^{\pi} \frac{\sin kx}{k}dx \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos kx}{k^2}\right]_0^{\pi} = -\frac{\cos k\pi - 1}{\pi k^2} \end{aligned}$$

Mivel $\cos k\pi = (-1)^k$,

$$a_k = \frac{1-(-1)^k}{\pi k^2} = \begin{cases} \frac{2}{\pi k^2} & \text{ha } k = 2n+1 \\ \\ 0 & \text{ha } k = 2n \end{cases}$$

Hasonló módon:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\left\{ \int_{-\pi}^{0} \pi \sin kx dx + \int_0^{\pi} (\pi - x)\sin kx dx \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi}\left\{ \left[-\pi \frac{\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^{0} + \left[-(\pi - x)\frac{\cos kx}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\cos kx}{k} dx \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi}\left\{ -\frac{\pi}{k} - \frac{\pi}{k}\cos k\pi + \frac{\pi}{k} + \left[\frac{\sin kx}{k^2}\right]_0^{\pi} \right\} = -\frac{1}{k}(-1)^k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}. \end{aligned}$$

A függvény Fourier-sora, mely előállítja a függvényt magát:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{4}\pi + \frac{2}{\pi}\cos x + \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{2}{\pi 3^2}\cos 3x + \\ &\quad + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{2}{\pi 5^2}\cos 5x - \frac{1}{5}\sin 5x + \dots \end{aligned}$$

Rendezzük át a sort:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{4}\pi + \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \dots\right) - \\ &\quad - \left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \dots\right) \end{aligned}$$

A Fourier-sor előállítja a függvényt. Helyettesíthetünk tehát a sorba $x = 0$-t. A függvény a zérus helyen π értékű, $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$, tehát

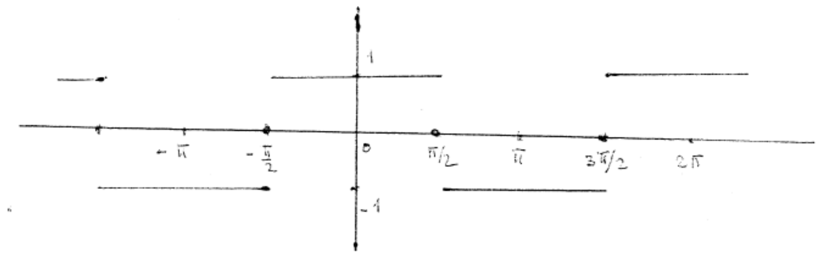
$$\begin{aligned} \pi &= \frac{3}{4} + \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right), \text{ azaz} \\ 1 &+ \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

Fourier sorfejtés célszerű alkalmazásával számos számsor összegét meg lehet határozni.

$\boxed{\textbf{F.2}}$ Ábrázolva az

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{ha } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \\ 0 & \text{ha } x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ f(x + 2k\pi) & \end{cases}$$

függvényt, látható, hogy a "görbe" az y tengelyre szimmetrikus, azaz a függvény páros.



Ekkor a Fourier-sor is csak páros függvényekből tevődik össze, azaz $b_k = 0$.
A koszinuszos tagok együtthatói, valamint a konstans kiszámításánál elegendő a félperiódusra integrálni, s az eredmény kétszeresét venni. Így:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, \qquad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kxdx. \\
a_0 &= \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\pi/2} dx - \int_{\pi/2}^{\pi} dx\right\} = 0 \\
a_k &= \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\pi/2} \cos kxdx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos kxdx\right\} = \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{\sin kx}{k}\right]_{\pi/2}^{\pi}\right\} = \frac{4}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Figyelembe véve a szinuszfüggvény értékeit:

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{ha } k = 2n \\ \frac{4}{k\pi} & \text{ha } k = 4n+1 \\ -\frac{4}{k\pi} & \text{ha } k = 4n+3 \end{cases}$$

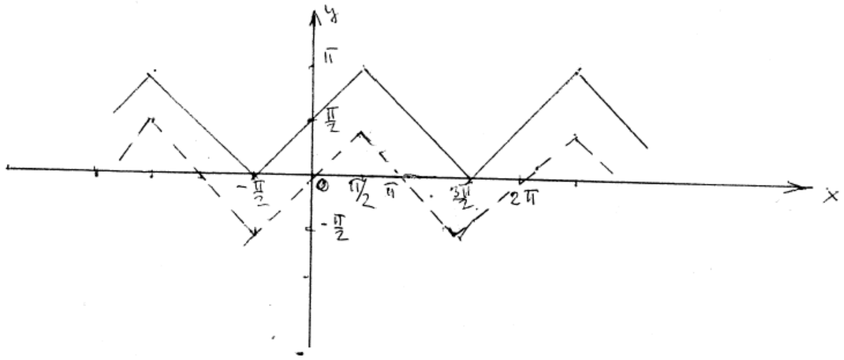
A keresett Fourier-sor:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \dots\right]$$

A sorba x=0-t behelyettesítve:

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right)$$

A keresett sorösszeg: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$.



$\boxed{\textbf{F.3}}$ A függvény se nem páros, se nem páratlan, ennek ellenére egyszerű lesz az együtthatók kiszámítása, ha észrevesszük, hogy f-et az y mentén $\dfrac{\pi}{2}$-vel negatív irányba eltolva páratlan függvényt kapunk.

Jelöljük ezt az új függvényt g-vel. A kettő között a kapcsolat $f(x) = g(x) + \dfrac{\pi}{2}$.

Ha az $f(x)$ függvénynél a_0-t kiszámítjuk, az előbbiek alapján $\dfrac{\pi}{2}$-t kell kapni eredményül. Ez könnyen ellenőrizhető. Számítsuk ki tehát először $g(x)$ Fourier-sorát:

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{ha } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{ha } \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \\ g(x + 2k\pi) & \end{cases}$$

g páratlan függvény, tehát $a_0 = a_k = 0$, és a b_k együtthatókat a

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin kx dx$$

összefüggés alapján számolhatjuk.

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{\pi}\left\{ \int_0^{\pi/2} x \sin kx dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \sin kx dx \right\} = \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{ \left[-x \frac{\cos kx}{k} \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos kx}{k} dx + \left[-(\pi - x) \frac{\cos kx}{k} \right]_{\pi/2}^{\pi} - \right. \\
&\quad \left. - \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos kx}{k} dx \right\} = \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{ -\frac{\pi}{2k} \cos k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2k} \cos k\frac{\pi}{2} + \left[\frac{\sin kx}{k^2} \right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{\sin kx}{k^2} \right]_{\pi/2}^{\pi} \right\} = \\
&= \frac{2}{k^2 \pi} 2 \sin \frac{\pi}{2} = \frac{4}{k^2 \pi} \sin k\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Mivel

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\pi}{2} &= \begin{cases} 0 & \text{ha } k = 2n \\ (-1)^k & \text{ha } k = 2n+1 \end{cases} \\
b_{2n+1} &= \frac{4}{\pi(2n+1)^2}(-1)^n
\end{aligned}$$

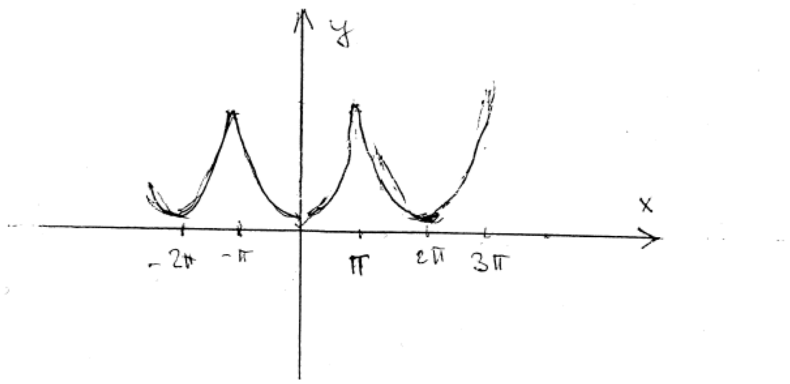
A g függvény Fourier-sora tehát a következő, elő is állítja a függvényt:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x = \\
&= \frac{4}{\pi}\left(\sin x - \frac{1}{9}\sin 3x + \frac{1}{25}\sin 5x - \dots\right)
\end{aligned}$$

Végül az $f(x)$ Fourier-sora:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x = \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\sin x - \frac{1}{9}\sin 3x + \frac{1}{25}\sin 5x - \dots\right).
\end{aligned}$$

F.4 Mint az alábbi ábrából látható a függvény páros.



Ezért $b_k = 0$.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cosh x dx = \frac{2}{\pi}\Big[\sinh x\Big]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\sinh\pi \\
a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cosh x\cos kx dx, \qquad k \geq 1
\end{aligned}$$

Az integrálást a parciális integrálás módszerével végeztük: kétszer számítjuk ki az integrál értékét: ellenkező "szereposztásban".

$$\int_0^{\pi}\underbrace{\cosh x}_{u}\underbrace{\cos kx}_{v'}dx = \left[\cosh x\frac{\sinh x}{k}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sinh x\sin kx dx$$

$$\int_0^\pi \underbrace{\cosh x}_{v'} \underbrace{\cos kx}_{u} dx = [\sinh x \cos kx]_0^\pi + k \int_0^\pi \sinh x \sin kx dx$$

Az első egyenletet k^2-tel szorozva és a másodikat hozzáadva a jobboldalon lévő integrálok összege zérus lesz, tehát

$$(k^2+1) \int_0^\pi \cosh x \cos kx dx = [k \cosh x \sin kx + \sinh x \cos kx]_0^\pi$$

A keresett határozott integrál így:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2+1} \Big[k \cosh x \sin kx + \sinh x \cos kx \Big]_0^\pi = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2+1} \sinh \pi \cos k\pi \end{aligned}$$

Mivel $\cosh k\pi = (-1)^k$:

$$a_k = \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \frac{(-1)^k}{k^2+1}$$

A keresett Fourier-sor, mely elő állítja a függvényt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sinh \pi}{\pi} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1} \cos kx \right) = \\ &= \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{5} \cos 2x - \frac{1}{10} \cos 3x + \frac{\cos 4x}{17} - \dots \right). \end{aligned}$$

F.5

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{2k+1} + (-1)^{k+1} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} \right) \sin(2k+1)x = \\ &= 2 \left[\left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \sin x + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9\pi} \right) \sin 3x + \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{25\pi} \right) \sin 5x + \dots \right]. \end{aligned}$$

F.6

$$f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \left(\sin x - \frac{\sin 5x}{5^2} + \frac{\sin 7x}{7^2} - \frac{\sin 11x}{11^2} + \frac{\sin 13x}{13^2} - \dots \right).$$

F.7

$$f(x) = \frac{3\pi}{8} - \frac{2}{\pi} \left(\cos x + \frac{2}{2^2} \cos 2x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + + \frac{2}{6^2} \cos 6x + \frac{1}{7^2} \cos 7x + \dots \right).$$

F.8

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \dots\right).$$

F.9

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \dots\right).$$

F.10

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \dots\right).$$

F.11

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \dots\right).$$

F.12

$$f(x) = -\frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \dots\right).$$

F.13

$$f(x) = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots$$

F.14

$$f(x) = -\frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \dots\right).$$

F.15

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\left(\sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \dots\right).$$

F.16

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \dots\right).$$

F.17

$$f(x) = -\frac{1}{\pi}\left[(\pi + 2)\sin x - \frac{\pi}{2}\sin 2x + \frac{3\pi - 2}{3^2}\sin 3x - \frac{\pi}{4}\sin 4x + \dots\right].$$

F.18

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\left[(\pi+2)\sin x - \frac{\pi}{2}\sin 2x + \frac{3\pi-2}{3^2}\sin 3x - \frac{\pi}{4}\sin 4x + \dots\right].$$

F.19

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{2}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{6^2}\cos 6x + \frac{1}{7^2}\cos 7x + \dots\right).$$

F.20

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{2}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{6^2}\cos 6x + \frac{1}{7^2}\cos 7x + \dots\right).$$

F.21

$$f(x) = -\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \dots\right).$$

F.22

$$f(x) = -\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \dots\right).$$

F.23

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x - \frac{1}{4^2}\cos 4x + \dots\right).$$

Az $x = 0$ helyen $\cos(kx) = 1$ ezt helyettesítsük be. Így, mivel $f(0) = 0$, ezt kapjuk:

$$0 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots\right).$$

Azaz:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

F.24

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{4}{\pi}\cos x + \left(\frac{1}{2^2-1} + \frac{8}{\pi 2^2}\right)\cdot\cos 2x - \frac{4}{\pi 3^2}\cos 3x - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4^2-1}\cos 4x - \frac{4}{\pi 5^2}\cos 5x + \left(\frac{1}{6^2-1} + \frac{8}{\pi 6^2}\right)\cos 6x - \dots\right].$$

F.25

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$$

F.26

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$$

F.27

$$f(x) = \frac{2}{9}\left[(\pi^2 - 6)\sin x - \frac{2\pi^2 - 6}{2^2}\sin 2x + \frac{(3\pi - 6)}{3^2}\sin 3x - \right.$$
$$\left. - \frac{4\pi^2 - 6}{4^2}\sin 4x + \dots\right].$$

F.28

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{2^2 - 1} + \frac{\cos 4x}{4^2 - 1} + \frac{\cos 6x}{6^2 - 1} + \dots\right)$$

Érdemes észrevenni, hogy ha $x = 0$, akkor:

$$0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots\right)$$

azaz

$$\frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{2}{\pi} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

F.29

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{2^2 - 1} - \frac{\cos 4x}{4^2 - 1} + \frac{\cos 6x}{6^2 - 1} - \dots\right)$$

$x = 0$-nál:

$$1 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2^2 - 1} - \frac{1}{4^2 - 1} + \frac{1}{6^2 - 1} - \dots\right).$$

Ebből következik, hogy

$$\frac{\pi - 2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2^2 - 1} - \frac{1}{4^2 - 1} + \frac{1}{6^2 - 1} - \dots \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{4k^2 - 1} = +\frac{\pi - 2}{\pi}.$$

F.30

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{3} + \frac{\cos 2x}{15} + \frac{\cos 3x}{35} + \dots\right).$$

F.31 Ha az $f(x)$ függvény nem 2π, hanem általános $2l$ periódusú függvény, akkor a Fourier-sor ebben az esetben

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x \right)$$

alakú, ahol az együtthatókat az

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) dx \\ a_k &= \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \cdot \cos \frac{k\pi}{l} x dx \\ b_k &= \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x dx \end{aligned}$$

összefüggések segítségével számítjuk ki.

Feladatunkban az $f(x)$ függvény páros, s így $b_k = 0$. Továbbá itt is alkalmazható a fél-intervallumon integrálás:

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^1 f(x) dx, \qquad a_k = \frac{2}{l} \int_0^1 f(x) \ \cos \frac{k\pi}{l} x dx.$$

Most $2l = 2$, és így $l = 1$.

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \\ a_k &= 2 \int_0^1 x^2 \cos(k\pi x)\, dx = \frac{4}{k\pi} \left(\left[x \frac{\cos k\pi x}{k\pi} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\, dx \right) = \\ &= \frac{4}{k\pi} \left(\frac{\cos(k\pi)}{k\pi} - \left[\frac{\sin(k\pi x)}{k^2\pi^2} \right]_0^1 \right) = (-1)^k \frac{4}{k^2\pi^2}. \end{aligned}$$

A Fourier sorfejtés:

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \left(-\cos(\pi x) + \frac{1}{2^2} \cos(2\pi x) - \frac{1}{3^2} \cos(3\pi x) + \cdots \right).$$

F.32 Ha a függvény görbéjét $(-\frac{1}{2})$-del az y tengely mentén eltoljuk, akkor páratlan függvényt kapunk. Legyen tehát:

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{2} = \begin{cases} -1/2, & \text{ha } -2 < x \le -1 \\ x/2, & \text{ha } -1 \le x \le 1 \\ 1/2, & \text{ha } 1 \le x < 2 \\ 0, & \text{ha } x = \pm 2; \end{cases}$$

A függvény páratlan, ezért $a_0 = a_k = 0,\ k \in \mathbb{N}$.

A függvény periódusa $2l = 4$, vagyis $l = 2$. Ezért a sinus-os tag együtthatói:

$$\begin{aligned}
b_k &= 2\,\frac{1}{2}\left(\int_0^1 \frac{x}{2}\sin(\frac{k\pi}{2}x)\,dx + \int_1^2 \frac{1}{2}\sin(\frac{k\pi}{2}x)\,dx\right) = \\
&= \left[\frac{x}{2}\cdot\frac{-\cos\frac{k\pi}{2}}{\frac{k\pi}{2}}\right]_0^1 + \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \cos(\frac{k\pi}{2}x)\,dx - \frac{1}{2}\left[\frac{\cos(\frac{k\pi}{2})}{\frac{k\pi}{2}}\right]_1^2 = \\
&= -\frac{1}{k\pi}\cos(\frac{k\pi}{2}) + \frac{2}{k^2\pi^2}\left[\sin(\frac{k\pi}{2}x)\right]_0^1 - \frac{1}{k\pi}\cos(k\pi) + \frac{1}{k\pi}\cos(\frac{k\pi}{2}) = \\
&= -\frac{\cos(k\pi)}{k\pi} + \frac{2}{k^2\pi^2}\sin(\frac{k\pi}{2}) = \frac{1}{k\pi}\left[\frac{2}{k\pi}\sin(\frac{k\pi}{2}) - \cos(k\pi)\right]
\end{aligned}$$

Mivel

$$\sin(\frac{k\pi}{2}) = \begin{cases} 0, & \text{ha } k = 2n \\ (-1)^k, & \text{ha } k = 2n+1 \end{cases},$$

és

$$\cos(k\pi) = \begin{cases} 1, & \text{ha } k = 2n \\ -1, & \text{ha } k = 2n+1 \end{cases},$$

ezért:

$$\begin{aligned}
b_{2k} &= -\frac{1}{2k\pi} \\
b_{2k+1} &= \frac{1}{(2k+1)\pi}\left((-1)^k\frac{2}{(2k+1)\pi} + 1\right).
\end{aligned}$$

A keresett Fourier-sor: $f(x) = \frac{1}{2} + g(x)$. Ezért

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left[\left(1+\frac{2}{\pi}\right)\frac{1}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}x) - \frac{1}{2\pi}\sin(\frac{2\pi}{2}x) + \left(1-\frac{2}{3\pi}\right)\frac{1}{3\pi}\sin(\frac{3\pi}{2}x) -\right. \\
&- \left.\frac{1}{4\pi}\sin(\frac{4\pi}{2}x) + \left(1+\frac{2}{5\pi}\right)\frac{1}{5\pi}\sin(\frac{5\pi}{2}x) - \frac{1}{4\pi}\sin(\frac{4\pi}{2}x) + \ldots\right]
\end{aligned}$$

F.33

$$f(x) = 1 - \frac{2}{\pi}\left(\sin(\frac{\pi}{2}x) + \frac{1}{2}\sin(2\,\frac{\pi}{2}x) + \frac{1}{3}\sin(3\,\frac{\pi}{2}x) + \ldots\right).$$

F.34

$$f(x) = -\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\left(\cos\pi x - \frac{1}{2^2}\cos 2\pi x + \frac{1}{3^2}\cos 3\pi x - \ldots\right).$$

F.35

$$f(x) = \frac{e^3 - 4}{6} + 3\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^3(-1)^k - 1}{9 + k^2\pi^2} \cdot \cos\frac{k\pi}{3}x$$

F.36

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin 2x}{1\cdot 3} - \frac{2\sin 4x}{3\cdot 5} + \frac{3\sin 6x}{5\cdot 7} - \dots\right).$$

F.37

$$f(x) = 1 - \frac{4}{3\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1+\cos 4k}{k^2} - \frac{\sin 4k}{2k^3}\right)\cos 2kx + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\sin 4k}{k^2} + \frac{\cos 4k - 1}{2k^3}\right)\sin 2kx\right]$$