Számsorok
Ismétlés és 2. rész

2014. október 2.

Leibniz - típusú sorok

Definíció. $\left(\sum a_n\right)$ **Leibniz - típusú sor**, ha az (a_n) sorozat rendelkezik az alábbi három tulajdonsággal.

1. Váltakozó előjelű, azaz $a_n a_{n+1} \leq 0$,

2. $(|a_n|)$ monoton fogyó,

3. (a_n) nullsorozat.

Tétel. A Leibniz -típusú sor konvergens.

Más jelöléssel

$$b_n = |a_n|$$

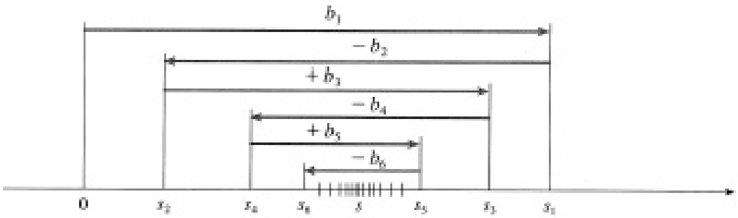
A Leibniz sor

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 \ldots, \qquad b_n > 0,$$

ahol

$$b_{n+1} \leq b_n, \qquad \lim b_n = 0.$$

”Bizonyítás”



Leibniz sor, maradék tag becslés

Legyen a sor összege s, és jelölje

$$R_n = s - s_n.$$

Ekkor

$$\operatorname{sign}(R_n) = \operatorname{sign}(a_{n+1}),$$

$$|R_n| \leq |a_{n+1}|.$$

Példa

Példa. Tekintsük az alábbi végtelen sort:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Látható, hogy ez Leibniz-típusú.

Ezért konvergens, létezik a részletösszegek határértéke:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} < \infty$$

Másrészt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \right| = \infty,$$

ahogy korábban már beláttuk.

Paradoxon?

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = c$$

A sort átrendezzük:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) \ldots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \ldots =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots\right) = \frac{c}{2}.$$

$$c = \frac{c}{2}!?$$

Abszolút konvergens sor

Definíció. A $(\sum a_n)$ végtelen sor **abszolút konvergens**, ha az abszolútértékekből álló $(\sum |a_n|)$ sor konvergens.

Állítás. Ha $(\sum a_n)$ abszolút konvergens, akkor konvergens is.

Példa.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$$

sor konvergens, hiszen Leibniz típusú. Másrészt beláttuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

tehát a sor abszolút konvergens.

Példa. Az alternáló *harmonikus sor*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

konvergens. Az abszolútértékekből álló sorra beláttuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty.$$

Tehát ez a sor **nem abszolút konvergens**.

Definíció. A $(\sum a_n)$ végtelen sor **feltételesen konvergens**, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

A sor összege

Állítás. Abszolút konvergens sor esetén a sor összege független az összeadandók sorrendjától.

Riemann tétel. *Feltételesen konvergens sor esetén a sor átrendezésével az összeg* ***bármi*** *lehet.*

Megjegyzés: Mivel a

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

sor feltételesen konvergens, így az összeg függ az összeadás sorrendjétől.

A sor összge *bármi* is lehet.

$\Rrightarrow$ ”PARADOXON” megoldása

Néhány nevezetes sor összege

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{60} + \cdots = e$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{60} + \cdots = \frac{1}{e}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots = \ln 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Néhány további nevezetes sor összege

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{60}+\cdots=e$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k2^k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{64}+\cdots=\ln 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

(Ez a Leibniz formula π előállítására.)

Példa. Koch görbe

Képezzünk sokszöget egy szabályos, a oldalú, T területű háromszögből a következő rekurzív eljárással:

1. lépés Osszunk minden oldalt 3 egyenlő részre.

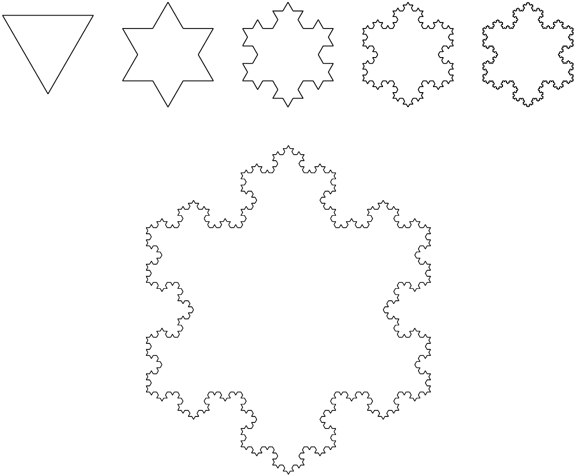
2. lépés Minden középső oldalszakaszra illesszünk szabályos háromszöget.

Ezután ismételjük meg az ezeket a lépéseket.

Az így kapott sokszög az úgynevezett Koch-görbe.

Mennyi ennek az alakzatnak a kerülete és területe?

Példa. Koch görbe II.



Koch görbe kerülete

A Koch-görbe kerületét egy sorozat határértékeként kapjuk.

Minden lépésben minden oldal hossza $\frac{4}{3}$ -szorosára nő, mivel minden oldal középső harmadát nála kétszer hosszabbra cseréltük.

A kerület tehát:

$$K_\infty = 3a \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$$

Koch görbe területe

A Koch-görbe területe geometriai sor határértékeként áll elő.

Az egyes lépésekben újonnan illesztett háromszögek *száma* az oldalszámmal egyenlő (azaz lépésenként 4-szeresére nő), *területe* az előző háromszögek területének $\frac{1}{9}$-szerese.

E két tényező figyelembevételével a terület határértékére felírható geometriai sor:

$$T_\infty = T + 3 \cdot \frac{T}{9} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{T}{9 \cdot 9} + 3 \cdot 16 \cdot \frac{T}{9 \cdot 81} + \cdots =$$

$$= T + \lim_{n \to \infty} 3 \cdot \frac{T}{9} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{4}{9} \right)^k =$$

$$T + \frac{T}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = T + \frac{T}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{8T}{5}.$$

Koch görbe, fraktál

Megjegyzés. Érdekes belegondolni abba a ténybe, hogy a kapott alakzat *véges* területét önmaga kicsinyített másaiból előálló *végtelen* hosszú görbe határolja.

A Koch-görbe tipikus példája az **önhasonló fraktál**oknak.