

# MATEMATIKAI ANALÍZIS I.

Példatár+

2009. október 27.

A feladatok nehézségét a sorszám után következő + jelek száma jelzi.

Így + kicsit nehéz és ++++ már "nagyon nehéz" feladatot jelöl.

## Teljes indukció

1. Síkbeli összefüggő tartományt  $n$  egyenessel részekre bontunk. Igazolja, hogy ez a "térkép" kiszínezhető két színnel, hogy a szomszédos részek különböző színűek legyenek.

## Valós számsorozatok

2. + Igazolja, hogy az alábbi sorozat határértéke 0, függetlenül a kezdetiértéktől:

$$a_{n+1} = \sin(a_n), \quad a_1 = x \in \mathbb{R}$$

3. Tekintsük az alábbi rekurzív sorozatot:

$$a_n = \frac{1}{4} + a_{n-1}^2$$

- a) + Igazolja, hogy  $|a_0| \geq 1$  esetén  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty!$
- a) ++ Igazolja, hogy  $|a_0| > \frac{1}{2}$  esetén  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty!$
- b) ++ Igazolja, hogy  $|a_0| < 1/2$  esetén  $(a_n)$  konvergens! Mi a határérték?

4. Tekintsük az alábbi rekurzív sorozatot:

$$a_n = \frac{2}{1 + a_{n-1}}$$

- a) + Milyen  $a_0$  kezdetiérték esetén lesznek a sorozat tagjai egyenlők?  
 b) +++++ Milyen  $a_0$  esetén lesz  $(a_n)$  konvergens?  
 5. +++ Általános kezdetiérték mellett határozza meg a sorozat határértékét:

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad a_0 = x \in \mathbb{R}$$

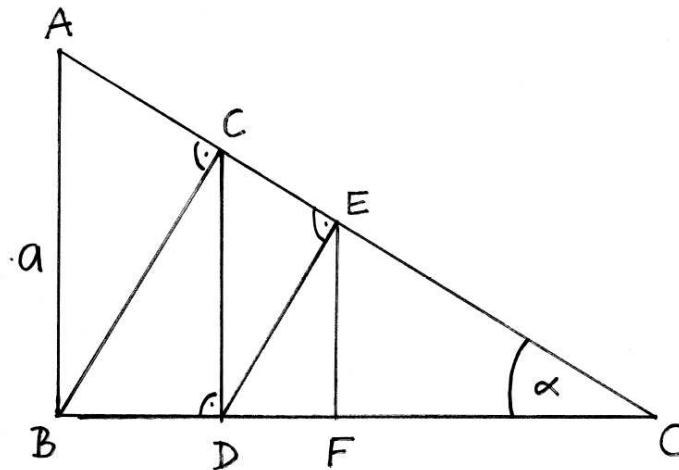
## Valós számsorok

6. +++ Tekintsük azt a végtelen sort, melyben az  $n$ -dik összeadandó:  $a_n = \frac{n+1}{n!}$ .
- a) Számolja ki  $s_1, s_2, s_3, s_4$  értékét.  
 b) Ez alapján próbálja kitalálni az általános összegképletet – és igazolja.  
 c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!} = ?$$

7. + Adott az ABC derékszögű háromszög, melynek egyik hegyesszöge  $\alpha$  és a szemben fekvő befogója  $a$ . Határozza meg az ábrán látható szakaszok összhosszát  $a$  és  $\alpha$  függvényében – ha a konstrukciót a végtelenségig folytatjuk:

$$AB + BC + CD + \dots = ?$$



## Valós függvények. Folytonosság, határérték

(Határidő: november 9.)

8. Legyen  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  az alábbi függvény:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{ha } x = \frac{p}{q} \\ 0 & \text{ha } x \text{ irrac.} \end{cases}$$

Igazolja, hogy  $f$  a racionális pontokban nem folytonos, az irracionális pontokban folytonos.

9. ++ Van-e olyan  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény, melyre

$$f(f(x)) = -x, \quad x \in \mathbb{R}?$$

Igazolja.

10. +++ Van-e olyan folytonos függvény a  $[0, 1]$  intervallumon, mely **minden** értéket pontosan kétszer vesz fel? Igazolja.
11. Egy tibeti szerzetes reggel 7-kor elhagyja a kolostort, hogy szokásos útvonalán felmenjen a hegytetőre. Másnap reggel újra 7-kor indul a hegycsúcsról, és este 7-re ér vissza a kolostorba. Igazolja, hogy az útvonalon van olyan pont, ahol mindkét nap pontosan ugyanakkor megy át a szerzetes.
12. ++ Egy  $f$  függvény fixpontja  $c$ , ha  $f(c) = c$ .  
Legyen  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  olyan folytonos függvény, melyre  $D_f = R_f = [0, 1]$ . Igazolja, hogy a függvénynek van fixpontja.