IV. INTEGRÁLSZÁMÍTÁS
Megoldások

2009. november

Határozatlan integrálás

4.05.

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}\ dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

4.06.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{1}{3}}\ dx = 3\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$$

4.07.

$$\int x^2\left(x^2-1\right)\ dx = \int \left(x^4 - x^2\right)\ dx = \int x^4\ dx - \int x^2\ dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + C$$

4.08.

$$\int \left(x^2-1\right)^2 dx = \int \left(x^4 - 2x^2 + 1\right) dx = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x + C$$

4.09.

$$\int \frac{\sqrt{x} - x + x^4}{x^2}\ dx = \int \left(x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{x} + x^2\right)\ dx = -\frac{2}{\sqrt{x}} - \ln x + \frac{x^3}{3} + C$$

4.11.

$$\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\ dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 1\right)\ dx = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + x + C$$

4.14.

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\ dx = \int \left(\frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)} + \frac{x^2}{x^2(1+x^2)}\right)\ dx =$$
$$= \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right)\ dx = -\frac{1}{x} + \text{arc tg}\ x + C$$

4.15.

$$\int \frac{6}{5+5x^2}\ dx = \frac{6}{5}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{6}{5}\ \text{arc tg}\ x + C$$

4.16.

$$\int \frac{\ln 2}{\sqrt{2+2x^2}}\ dx = \frac{\ln 2}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\ln 2}{\sqrt{2}} \cdot \text{arc sh}\ x + C$$

4.18.

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\ dx &= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x}\ dx \\ &= \int (\cos x + \sin x)\ dx = \sin x - \cos x + C.\end{aligned}$$

4.19. $\dfrac{x^2}{2} + C.$

4.20. $x - 7\ln x - \dfrac{8}{x} + C.$

4.21. Végezzük el az $u = -x$ helyettesítést, ezzel $dx = -du$:

$$\int e^{-x}\, dx = -\int e^{u}\, du = -e^{u} + C = -e^{-x} + C.$$

4.22. Végezzük el az $u = 4x - 5$ helyettesítést. Ekkor $du = 4\, dx$, és így

$$\int \cos(4x-5)\, dx = \frac{1}{4}\int \cos u\, du = \frac{1}{4}\sin u + C = \frac{1}{4}\sin(4x-5) + C.$$

Megjegyzés: Az ilyen integrálokat célszerű annak az összefüggésnek a felhasználásával kiszámítani, hogy ha

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

akkor

$$\int f(Ax+b)\, dx = \frac{1}{A}F(Ax+b) + C.$$

Például:

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C,$$

tehát

$$\int \cos(4x-5)\, dx = \frac{1}{4}\sin(4x-5) + C.$$

A továbbiakban ezt az eljárást alkalmazzuk valahányszor a belső függvény x-nek lineáris függvénye.

4.23.

$$\int \sqrt{8-2x}\, dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(8-2x)^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}\sqrt{(8-2x)^3} + C$$

4.24.

$$\int \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)\, dx = -\frac{1}{3}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)\right] + C = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) + C$$

4.25.

$$\begin{aligned}\int 10^x e^x\, dx &= \int e^{x\ln 10}\cdot e^x\, dx = \int e^{x(1+\ln 10)}\, dx\\ &= \frac{e^{x(1+\ln 10)}}{1+\ln 10} + C = \frac{10^x e^x}{1+\ln 10} + C.\end{aligned}$$

Megoldás közben azt az összefüggést használtuk fel, hogy $a = e^{\ln a}$, ill. $10 = e^{\ln 10}$. Ezért

$$10^x = \left(e^{\ln 10}\right)^x = e^{x\ln 10}.$$

4.26.

$$\int \frac{dx}{5+x^2} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{5}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\sqrt{5}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C = \frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

4.27.

$$\int \frac{3}{\sqrt{3x^2-2}}\,dx = \frac{3}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{3x^2}{2}-1}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2-1}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathrm{arch}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right)+C = \;= \sqrt{3}\,\mathrm{arch}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right)+C.$$

4.30.

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int(-2x)\cdot\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int\sqrt{u}\,du = -\frac{1}{3}\,u^{\frac{3}{2}}+C =$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}+C.$$

Az integrálban $u = 1-x^2$ helyettesítést végeztük el, ekkor $du = -2x\ dx$.

4.32.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{x^2+1}+C.$$

A használt helyettesítés: $u = x^2+1$, ekkor $du = 2x\ dx$.

4.33.

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \int\frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{\sin x}+C.$$

A használt helyettesítés: $u = \sin x$, ekkor $du = \cos x\ dx$.

4.34.

$$\int x\sin(x^2+2)\,dx = \frac{1}{2}\int\sin u\,du = -\frac{1}{2}\cos\left(x^2+2\right)+C.$$

A használt helyettesítés: $u = x^2+2$, ekkor $du = 2x\ dx$.

4.36.

$$\int \frac{x}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(4+x^2\right)+C.$$

Azt látjuk, hogy 2-vel való szorzás után a számláló a nevező deriváltja, tehát a kifejezés integrálja a nevező e alapú logaritmusával egyenlő. Ezt a szabályt jól tanuljuk meg és az ilyen esetekben mellőzzük a helyettesítést, bár ez az előzőek egy speciális esete. (Most is alkalmazhattuk volna az $u = x^2+4$ helyettesítést.)

4.37.

$$\int\frac{dx}{x\ln x} = \int\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \ln\ln x + C$$

4.38.

$$\int\frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx = \int\sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{\ln^3 x}+C.$$

A használt helyettesítés $u = \ln x$, ekkor $du = \dfrac{1}{x}\ dx$.

4.39.
$$\int \frac{x+2}{2x-1}\,dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\frac{5}{2}}{2x-1}\right)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln(2x-1) + C.$$

4.40.
$$\begin{aligned}\int \frac{x^4}{1-x}\,dx &= \int \left(-x^3 - x^2 - x - 1 - \frac{1}{x-1}\right)\,dx \\ &= -\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - \ln(x-1) + C.\end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy
$$\frac{x^4}{1-x} = -\frac{x^4}{x-1} = -\left(x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}\right).$$

4.41.
$$\int \frac{x}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\text{ arc tg } u + C = \frac{1}{2}\text{ arc tg } x^2 + C.$$
A használt helyettesítés $u = x^2$, ekkor $du = 2x\,dx$.

4.42.
$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\,dx = \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \text{arsh } u + C = \text{arsh}(\sin x) + C.$$
A használt helyettesítés: $u = \sin x$, ekkor $du = \cos x dx$.

4.44. Ilyen esetekben az integrálandó függvényt két függvény összegére (vagy különbségére) bontjuk úgy, hogy az egyik függvénynél a számláló a nevező deriváltjának valami konstansszorosa legyen, a másik függvénynél pedig a számláló már csak egy konstans, melyet az integrál jel elé is kivihetünk. Tehát
$$\int \frac{3x-1}{x^2+9}\,dx = \int \left(\frac{3x}{x^2+9} - \frac{1}{x^2+9}\right)\,dx =$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+9}\,dx - \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{3}{2}\ln\left(x^2+9\right) - \frac{1}{3}\text{ arc tg }\frac{x}{3} + C.$$

4.45.

4.46.

4.47.

4.48.

4.49.

4.50.

4.51.

4.53.

$$\int \left(\frac{x+2}{e^x}\right)^2 \, dx = \int \left(x^2+4x+4\right) \mathrm{e}^{-2x} \, dx = -\left(\frac{x^2}{2}+\frac{5}{2}x+\frac{13}{4}\right) e^{-2x} + C.$$

4.55.

$$\int x^3 e^{-x^2} \, dx = \frac{1}{2}\int x^2 e^{-x^2} 2x \, dx = \frac{1}{2}\int u e^{-u} du = -\frac{1}{2}(x^2+1) \, \mathrm{e}^{-x^2} + C,$$

ahol $u = x^2$ helyettesítéssel $du = 2xdx$.

4.57.

$$\int x \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int x \sin 2x \, dx = \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{x}{4}\cos 2x + C.$$

4.59.

$$\int \underbrace{x}_{u'} \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{v} \, dx = *,$$

ahol a parciális integráláskor $u = \frac{x^2}{2}$, és $v' = \frac{1}{1+x^2}$. Így

$$* = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

Felhasználtuk, hogy

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \, dx.$$

4.60.

$$\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx = 2\int u \operatorname{arctg} u \, du = x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C$$

A használt helyettesítés: $x = u^2$, ekkor $dx = 2u \, du$.

4.61. Két parciális integrálást kell elvézgezni:

$$\int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln^3 x}_{v} \, dx = x \ln^3 x - \int \underbrace{3}_{u'} \underbrace{\ln^2 x}_{v} \, dx =$$

$$= x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6\int \ln x \, dx == x\ln^3 - 3x\ln^2 x + 6x\ln x - 6x + C.$$

4.62. $u' = 1$, $v = (\arcsin x)^2$ válsztással egy parciális integrálást végz"unk, ekkor

$$u = x \qquad v' = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},$$

és ezért

$$\int (\arcsin x)^2 \, dx = x(\arcsin x)^2 - 2\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arc\,sin} x dx = *$$

Újabb parciális integrálást végzünk

$$u = \arcsin x, \qquad v' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

választással, ekkor

$$* = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\cdot \arcsin x - 2\int dx =$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\cdot \arcsin x - 2x + C.$$

4.63. Kífféleképpen végezzïnk parciális integrálást:

$$\int \underbrace{e^{3x}}_{u}\underbrace{\cos 2x}_{v'}\ dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x - \frac{3}{2}\int e^{3x}\sin 2x\ dx \tag{1}$$

ahol

$$u' = 3e^{3x} \qquad v = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Másrészt

$$\int \underbrace{e^{3x}}_{u'}\underbrace{\cos 2x}_{v}\ dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x + \frac{2}{3}\int e^{3x}\sin 2x\ dx \tag{2}$$

ahol

$$u = \frac{1}{3}e^{3x} \qquad v' = -2\sin 2x.$$

Szorozzuk meg (1)-et néggyel, (2)-t pedig kilenccel és vonjuk össze az így adódó kifejezések jobb illetve baloldalát.

$$4\int e^{3x}\cos 2x\ dx = 2e^{3x}\sin 2x - 6\int e^{3x}\sin 2x\ dx$$

$$9\int e^{3x}\cos 2x\ dx = 3e^{3x}\cos 2x + 6\int e^{3x}\sin 2x\ dx$$

$$13\int e^{3x}\cos 2x\ dx = 2e^{3x}\sin 2x + 3e^{3x}\cos 2x + C$$

Végül 13-al való osztás után nyerjük, hogy:

$$\int e^{3x}\cos 2x\ dx = \frac{1}{13}e^{3x}(2\sin 2x + 3\cos 2x) + C.$$

4.64.

$$\int e^{\arcsin x}\ dx = \int e^{u}\cos u\ du,$$

ahol $\arcsin x = u$, azaz $x = \sin u$ helyettesítéssel $dx = \cos u\ du$ Így olyan alakra jutottunk, melyet parciálisan lehet integrálni, éppen az előző példában is bemutatott módszerrel. A parciális integrálást elvégezve adódik, hogy

$$\int e^{u}\cos u du = \frac{1}{2}e^{u}(\sin u + \cos u) + C,$$

tehát

$$\int e^{\arcsin x}dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\arcsin x}(x+\sqrt{1-x^2}+C)$$

4.65. Ha a másodfokú nevezőjű törtfüggvény nevezője tényezők szorzataként írható fel, akkor a tört lineáris nevezőjű törtek összegére bontható.

Annak érdekében, hogy ezt a felbontást elvégezhessük a nevezőt egyenlővé tesszük 0-val és megoldjuk az így nyert egyenletet, mert ennek az egyenletnek a gyöktényezői lesznek a szorzat alakban felírt nevező tényezői. Az $x^2-7x+12=0$ egyenlet gyökei: $x_1=3$, $x_2=4$, azaz

$$x^2-7x+12=(x-3)\cdot(x-4)$$

Most már ismerjük a keresett lineáris tört-függvények nevezőit, meghatározandók még a számlálók, melyek lineáris nevező esetén konstansok lesznek.
Jelöljük ezeket A-val és B-vel, akkor

$$\frac{x-2}{x^2-7x+12}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-4}\equiv\frac{A(x-4)+B(x-3)}{(x-3)(x-4)}.$$

Azonosságot írtunk, mert olyan A és B értéket keresünk, melyek mellett az egyenlőség minden x-re fennáll. Mivel a nevezők azonosan egyenlők az azonosságnak a számlálókra is fenn kell állni, azaz

$$x-2\equiv A(x-4)+B(x-3).$$

Az azonosság nyilván fennáll, ha az x-es tagok együtthatója mind a két oldalon egyenlő ugyanúgy, mint a konstansok. Ez azonban két egyenletet szolgáltat, melyekből A és B kiszámítható.

A+B=1
-4A-3B=-2

4A+4B=4
-4A-3B=-2
B=2

A kapott B értéket behelyettesítve pld. az első egyenletbe $A=-1$ adódik, tehát

$$\frac{x-2}{x^2-7x+12}=-\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x-4}.$$

Ezért az integrál

$$\int\frac{x-2}{x^2-7x+12}\,dx=\int\left(-\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x-4}\right)\,dx=-\ln(x-3)+2\ln(x-4)+C=$$

$$=\ln c\frac{(x-4)^2}{x-3},\qquad (C=\ln c \text{ bevezetésével})$$

4.66. Az $x^2+4x+8=0$ egyenletnek nincsenek valós gyökei, tehát x^2+4x+8 nem bontható tényezők szorzatára.

Bontsuk fel a törtet két tört összegére, melynek nevezője közös (a régi nevező), az egyik számlálója a nevező deriváltjának valami konstansszorosa, a másiké pedig konstans. A nevező deriváltja $2x+4$, tehát a számlálókat a következő alakban keressük

$$\alpha(2x+4)\qquad \text{és}\qquad \beta.$$

α és β értékét a következő feltételekből határozhatjuk meg:

$$\alpha(2x+4)+\beta = 3x-2.$$

Most is két egyenletet írhatunk fel, melyekből α és β meghatározható.

$$2\alpha = 3, \qquad 4\alpha+\beta = -2,$$

ezekből

$$\alpha = \frac{3}{2}, \qquad \beta = -8.$$

Így az integrált két integrál összegére bontottuk:

$$\int \frac{3x-2}{x^2+4x+8}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}\,dx - 8\int \frac{dx}{x^2+4x+8}.$$

Az első integrál eredménye ismert, hiszen a számláló a nevező deriváltja. A másodikat pedig teljes négyzetté való átalakítással vezetjük vissza ismert feladatra.

$$\frac{1}{x^2+4x+8} = \frac{1}{(x+2)^2+4} = \frac{1}{4\left[\frac{(x+2)^2}{4}+1\right]}$$

ezért

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{4}2\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}+C$$

Tehát a megoldás:

$$\int \frac{3x-2}{x^2+4x+8}dx = \frac{3}{2}\ln(x^2+4x+8) - 4\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}+C$$

4.67.

$$\frac{x^5+x^4+-8}{x^3-4x}$$

számlálója magasabb fokú mint a nevezője, ezért felbontható egy polinom és egy valódi tört összegére.

$$\left(x^5+x^4-8\right) : \left(x^3-4x\right) = x^2+x+4$$

$$\begin{array}{l}
\underline{-(x^5-4x^3)} \\
\qquad x^4+4x^3-8 \\
\quad \underline{-(x^4-4x^2)} \\
\qquad\quad 4x^3+4x^2-8 \\
\qquad \underline{-(4x^3-16x)} \\
\qquad\qquad 4x^2+16x-8
\end{array}$$

A polinom osztás eredménye:

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} = x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x},$$

tehát

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx = \int (x^2+x+4)dx + \int \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}dx$$

Az első integrál kiszámítása nem okoz gondot, ahhoz azonban, hogy a másodikat meghatározzuk, a törtet részlettörtek összegére kell bontanunk.

A nevezőt most minden különösebb számítás nélkül fel tudjuk írni szorzat alakjában

$$x^3-4x = x(x^2-4) = x(x+2)(x-2),$$

tehát

$$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2} =$$
$$= \frac{A(x^2-4)+B(x^2-2x)+C(x^2+2x)}{x^3-4x}.$$

Ennek alapján felírhatjuk az egyenletrendszert, melyből A, B és C kiszámítható:

$$A+B+C=4 \quad -2B+2C=16 \quad -4A=-8,$$

és innen

$$A=2, \qquad B=-3, \qquad C=5.$$

Megjegyezzük, hogy ilyen esetekben, amikor a gyökök mind különbözőek, általában gyorsabban kapjuk az ismeretlen A, B, C értékeket, ha a számlálók egyenlőségét kifejező egyenletben x helyére a gyököket helyettesítjük.

Példánkban az

$$4x^2+16x-8 = A(x^2-4)+B(x^2-2x)+C(x^2+2x)$$

kifejezésben x helyébe zérust írva azonnal nyerjük, hogy $-8=-4A$ azaz $A=2$. $x=2$-nél $40=8C$, innen $C=5$. Végül $x=-2$-nél $-24=8B$, azaz $B=-3$, tehát

$$\int \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x+2} + \frac{5}{x-2}\right)dx =$$
$$= 2\ln x - 3\ln(x+2) + 5\ln(x-2) + C.$$

A keresett megoldás:

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3} + C.$$

4.68. Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy a nevező négy különböző tényező szorzatára bontható. Ezután a feladat az előzőhöz hasonlóan oldható meg. De munkát takaríthatunk meg az $u=x^2$ helyettesítéssel. Ekkor ugyanis $du=2xdx$ és

$$\int \frac{x}{x^4-3x^2+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2-3u+2} = \frac{1}{2}\ln\frac{u-2}{u-1} + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{x^2-2}{x^2-1} + C.$$

4.70.

$$\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}\,dx = \int \frac{4x-8+11}{(x-2)^3}\,dx = \int \left[\frac{4}{(x-2)^2} + \frac{11}{(x-2)^3}\right] dx =$$
$$= -\frac{4}{x-2} - \frac{11}{2(x-2)^2} + C$$

4.71.

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 5$$

kifejezést $x-2$ polinomjaként felírva (pld. előállítjuk az

$$x_0 = 2$$

helyhez tartozó Taylor polinomját, lásd, 401. példát).

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 5 = (x-2)^3 - (x-2) + 1$$

adódik, azaz

$$\int \frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}\,dx = \int \frac{(x-2)^3-(x-2)+1}{(x-2)^4}\,dx =$$
$$= \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^3} + \frac{1}{(x-2)^4}\right) dx =$$
$$= \ln(x-2) + \frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{1}{3(x-2)^3} + C$$

(Természetesen úgy is eljárhattunk volna, hogy a részlettörtekre bontást a többszörös gyököknek megfelelően végeztük volna el

$$\frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} + \frac{d}{(x-2)^4}$$

alapján).

4.72. Többszörös gyökök esetén a gyöktényező a multiplicitásnak megfelelő számossággal szerepel a nevezőben az egytől a multiplicitásnak megfelelő hatványig. Elsőfokú gyöktényező esetén a számláló konstans.

$$\frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{d}{x-2} + \frac{e}{(x-2)^2}.$$

Ugyanis ebben a példában a 0 háromszoros, 2 pedig kétszeres gyök.

$$x^3 - 2x^2 + 4 \equiv$$
$$\equiv A(x^4-4x^3+4x^2) + B(x^3-4x^2+4x) + C(x^2-4x+4) + d(x^4-2x^3) + ex^3$$

$$\left.\begin{array}{l}A+d=0\\-4A+B-2d+e=1\\4A-4B+C=-2\\4B-4C=0\\4C=4\end{array}\right\}=$$

Egyenletrendszerből

$$A=\frac{1}{4},\quad B=1,\quad C=1,\quad d=-\frac{1}{4},\quad e=\frac{1}{2}$$

$$\int\frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}\,dx=\int\left(\frac{1}{4x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{4(x-2)}+\frac{1}{2(x-2)^2}\right)\,dx=$$
$$=\frac{1}{4}\ln\frac{x}{x-2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2(x-2)}+C$$

4.73.

$$\int\frac{dx}{x^4-x^2}=\int\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{0}{x}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}-\frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right)dx=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}+C$$

4.74.

$$\frac{1}{x^6+x^4}=\frac{1}{x^4(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x^4}+\frac{Ex+F}{x^2+1}$$

Másodfokú gyöktényező esetén a számláló elsőfokú!

$$1\equiv A(x^5+x^3)+B(x^4+x^2)+C(x^3+x)+d(x^2+1)+Ex^5+Fx^4$$

azonosságból írható fel az egyenletrendszer, melyből A, B, C, D, E és F meghatározható.

$$A+e=0$$
$$B+\mathrm{F}=0$$
$$A+C=0$$
$$B+d=0$$
$$C=0\quad A=0\quad e=0$$
$$d=1\quad B=-1\quad \mathrm{F}=1$$

Tehát

$$\int\frac{dx}{x^6+x^4}=\int\left(\frac{0}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{0}{x^3}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+\text{arc tg }x+C$$

4.75.
$$\frac{x}{x^3-1}=\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}=$$
$$=\frac{A(x^2+x+1)+B(x^2-x)+C(x-1)}{x^3-1}$$
$$A+B=0 \qquad A=\frac{1}{3}A-B+C=1 \qquad B=-\frac{1}{3}A-C=0 \qquad C=\frac{1}{3}$$
$$\int\frac{x}{x^3-1}dx=\int\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{-x+1}{x^2+x+1}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}+\frac{\frac{3}{2}}{x^2+x+1}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

4.76.
$$\int\frac{x^2}{1-x^4}dx=\int\frac{x^2}{(1+x^2)(1-x^2)}dx=\int\frac{x^2}{(1+x)(1-x)(1+x^2)}dx=$$
$$=\int\left(\frac{\frac{1}{4}}{1+x}-\frac{\frac{1}{4}}{1-x}+\frac{\frac{1}{2}}{1+x^2}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\text{arctg}\,x+C$$

4.77.
$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+d}{x^2+1}$$
alapján végezzük a részlettörtekre bontást és nyerjük:
$$\int\frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}=\int\left(\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x+1)^2}-\frac{x}{2(x^2+1)}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)C$$

4.78. A nevező tényezőkre bontását a következőképpen végezhetjük el:
$$1+x^4=1+2x^2+x^4-2x^2=(1+x^2)^2-2x^2=(1+x^2)^2-(\sqrt{2}\,x)^2=$$
$$=(1+x^2+\sqrt{2}\,x)(1+x^2-\sqrt{2}\,x)$$
A rész törtekre való bontás vázlata
$$\frac{1}{1+x^4}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$
Az eredmény:
$$\int\frac{dx}{1+x^4}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}\,x+1}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arctg}\,\frac{\sqrt{2}\,x}{1-x^2}+C$$

4.79. A feladat első pillanatra azonos jellegű az előzővel. Meg is oldható annak alapján, de gondosabb vizsgálat után kiderül, hogy speciális tulajdonságai figyelembe vételével sokkal egyszerűbben is megoldható.

$$\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4}dx = \int \frac{x}{1+x^4}dx - \int \frac{x^3}{1+x^4}dx$$

Az első integrált

$$u = x^2$$

helyettesítéssel hozhatjuk még egyszerübb alakra, alapintegrálra (lásd a 439. feladatot), a második pedig máris integrálható, mert a számláló a nevező deriváltjának a negyede.

$$\int \frac{x}{1+x^4}dx - \int \frac{x^3}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\text{arctg } x^2 - \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + C$$

4.80. Többszörös komplex gyök esetén javasolható a tg t helyettesítés.

$$\int \frac{dx}{(x^2+9)^3} = \frac{1}{729}\int \frac{dx}{\left(\frac{x^2}{9}+1\right)^3} = \frac{1}{729}\int \frac{dx}{\left[(\frac{x}{3})^2+1\right]^3} = \frac{1}{729}\int \frac{3}{\left(\text{tg}^2 t+1\right)^3\cos^2 t}dt =$$

$$= \frac{1}{243}\int \frac{\cos^6 t}{\cos^2 t}dt = (*)$$

$$\frac{x}{3} = \text{tg } t; \qquad dx = \frac{3}{\cos^2 t}dt$$

$$(*) = \frac{1}{243}\int \cos^4 t dt = \frac{1}{243}\int \left(\frac{1+\cos^2 t}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{243}\int \frac{1+2\cos 2t+\cos^2 2t}{4}dt =$$

$$= \frac{1}{972}\int (1+2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2})dt = \frac{1}{972}\left(t+\sin 2t+\frac{t}{2}+\frac{\sin 4t}{8}\right)+C =$$

$$= \frac{1}{972}\left(\frac{3}{2}\text{arctg } \frac{x}{3} + \frac{6x}{x^2+9} + \frac{3x(9-x^2)}{2(9+x^2)^2}\right) + C =$$

$$\frac{1}{648} \text{ arc tg } \frac{x}{3} + \frac{x}{216(x^2+9)} + \frac{x}{36(x^2+9)^2} + C$$

4.86. Páratlan kitevő esetén helyettesítéssel oldhatjuk meg a feladatot.

$$\int \cos^5 x dx = \int \cos^4 x \cdot \cos x dx = \int (\cos^2 x)^2 \cos x dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x dx =$$

$$= \int (1-u^2)^2 du = \int (1-2u^2+u^4)du = u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

$$u = \sin x \qquad du = \cos x dx$$

4.87. Páros kitevő esetén a linearizáló formula alkalmazását javasoljuk.

$$\int \sin^6 x dx = \int (\sin^2 x)^3 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1 - 3\cos 2x + 3\cdot\frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx - \frac{1}{8}\int \cos^3 2x dx$$

Az első integrálban újból alkalmaztuk a linearizáló formulát, így került

$$\cos^2 2x$$

helyébe

$$\frac{1+\cos 4x}{2}.$$

A második integrálban pedig már páratlan kitevőn szerepel trigonometrikus függvény, tehát az az előző példa mintájára megoldható.

Az eredmény:

$$\int \sin^6 x dx = \frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\sin 2x + \frac{3}{8}\sin 4x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{6}\sin^3 2x\right) + C$$

4.88.

$$\int \sin^6 x \cdot \cos^3 x\ dx = \int \sin^6 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x\ dx = \int \sin^6 x \cdot (1 - \sin^2 x)\cdot \cos x dx =$$

$$u = \sin x \qquad du = \cos x dx$$

$$= \int u^6(1-u^2)du = \frac{1}{7}\sin^7 x - \frac{1}{9}\sin^9 x + C$$

4.89.

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x}dx =$$

$$\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 2 + \cos^2 x\right) dx =$$

$$= \operatorname{tg} x - \frac{3}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

4.90.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\cdot \sin x}{\cos^4 x}dx = -\int \frac{1-u^2}{u^4}du = \int \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^4}\right) du = -\frac{1}{u} + \frac{1}{3u^3} + C =$$

$$u = \cos x \qquad du = -\sin x dx$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C$$

4.91. Alkalmazzuk a $t = \text{tg } \frac{x}{2}$ helyettesítést, akkor

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = \int \frac{2}{2t + 1 - t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\text{tg } \frac{x}{2} + \sqrt{2} - 1}{\text{tg } \frac{x}{2} - \sqrt{2} - 1} + C$$

4.92. Itt is válogathatunk a megoldási módszerek között. Alkalmazhatjuk a

$$t = \text{tg } \frac{x}{2}$$

helyettesítést, akkor

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{2}{1 - t^2} dt = 2 \cdot \text{arth} + C = \ln \frac{1 + \text{tg } \frac{x}{2}}{1 - \text{tg } \frac{x}{2}} + C = \ln \ \text{tg } (\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) + C$$

De ugyanúgy használhatjuk fel a páratlan kitevőjű jellegét is.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{du}{1 - u^2} = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} + C$$

Megfelelő átalakítások után az eredmény ugyanolyan alakra bontható:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \text{tg } (\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) + C$$

4.93.

$$\int \frac{dx}{5 - 3\cos x} = \frac{1}{2} \text{arctg } (2 \cdot \text{tg } \frac{x}{2}) + C$$

4.94. Ha $\sin x$-nek és $\cos x$-nek csak páros kitevőjű hatványai és tg x fordulnak elő, akkor (bár a $t = \text{tg } \frac{x}{2}$ helyettesítés akkor is alkalmazható) előnyösebb a $t = \text{tg } x$ helyettesítés alkalmazása.

$$\int \text{tg}^5 x \ dx = \int \frac{t^5}{1 + t^2} dt = \int (t^3 - t + \frac{t}{1 + t^2}) dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) + C = (*)$$

$$t = \text{tg } x \qquad x = \text{arc tg } t \qquad dx = \frac{dt}{1 + t^2}$$

$$(*) = \frac{1}{4} \cdot \text{tg}^4 x - \frac{1}{2} \cdot \text{tg}^2 x - \ln \cdot \cos x + C$$

4.95.

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2 x; \qquad \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1 + \text{tg}^2 x}{\text{tg}^2 x},$$

Tehát

$$t = \text{tg } x$$

helyettesítés esetén

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^4 x} = \int \frac{(1 + t^2)^2 \cdot (1 + t^2)^2}{t^4} \cdot \frac{dt}{1 + t^2} = \int \frac{(1 + t^2)^3}{t^4} dt =$$

$$= \int \frac{1+3t^2+3t^4+t^6}{t^4} dt = \int \left(\frac{1}{t^4} + \frac{3}{t^2} + 3 + t^2 \right) dt =$$

$$= -\frac{1}{3t^3} - \frac{3}{t} + 3t + \frac{t^3}{3} + C = -\frac{1}{3} \cdot \mathrm{cotg}^3 x - 3 \cdot \mathrm{cotg}\ x + 3 \cdot \mathrm{tg}\ x + \frac{1}{3} \cdot \mathrm{tg}^3 x + C$$

4.96.

$$\int \frac{1+\mathrm{tg}\ x}{\sin 2x}\ dx = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{tg}\ x + \frac{1}{2} \cdot \ln\ \mathrm{tg}\ x + C$$

4.97.

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{arc\ tg}\ (\sqrt{2}\ \mathrm{tg}\ x) + C$$

4.98.

$$\int \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\ dx = \frac{1}{4} \ln \frac{1+\mathrm{tg}\ x}{1-\mathrm{tg}\ x} + \frac{1}{2} \cdot \sin x \cdot \cos x + C$$

(A linearizáló formula segítségével $\cos 2x$ függvényeként írhatjuk fel az integrálandó függvényt. Ezáltal a feladat nagymértékben egyszerűsödik.)

4.99.

$$\int \sin 3x \cdot \cos\left(5x - \frac{\pi}{2}\right)\ dx = \frac{1}{2} \int \left[\sin(8x - \frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{2} - 2x) \right] dx =$$

$$= \frac{1}{4} \cos(2x - \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{26} \cos(8x - \frac{\pi}{2}) + C$$

4.100. Nem típus feladat, de

$$\sin x = \sin 2 \cdot \frac{x}{2} = 2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$$

és

$$\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 1$$

összefüggések felhasználásával egyszerű megoldást nyerünk.

$$\int \sqrt{1+\sin x} dx = \int \sqrt{\sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} dx =$$

$$= \int (\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}) dx = 2 \cdot \sin \frac{x}{2} - 2 \cdot \cos \frac{x}{2} + C$$

4.101. A hiperbolikus függvények integrálását sok esetben, mint pl. most is a trigonometrikuséhoz hasonlóan végezzük el. Már most megemlítjük azonban, hogy a hiperbolikus függvények racionális függvényeinek az integrálása mindig visszavezethető e^x racionális függvényének az integrálására. Hogy mikor melyik utat választjuk azt a célszerűség dönti el.

$$\int \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{ch}^3 x\ dx = \int \mathrm{sh}^2 x \cdot (1+\mathrm{sh}^2 x) \cdot \mathrm{ch}\ x\ dx = \int u^2 (1+u^2) du = \int (u^2+u^4) du = (*) =$$

$$u = \mathrm{sh}\ x; \qquad du = \mathrm{ch}\ x dx$$

$$(*) = \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C = \frac{1}{3}\ \mathrm{sh}^3 x + \frac{1}{5}\ \mathrm{sh}^5 x + C$$

4.102.

$$\int \frac{\text{sh}^3 x}{\sqrt{\text{ch } x}}\, dx = \int \frac{(\text{ch}^2 x - 1)\text{sh } x}{\sqrt{\text{ch } x}}\, dx = \int \frac{u^2-1}{\sqrt{u}} du = \frac{2}{5}\sqrt{\text{ch}^5 x} - 2\sqrt{\text{ch } x} + C$$

$$u = \text{ch } x \qquad du = \text{sh } x dx$$

4.103.

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$$

tehát írható, hogy

$$\int \frac{dx}{\text{sh } x \cdot \text{ch } x} = \int \frac{\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x}{\text{sh } x \cdot \text{ch } x} dx = \int \left(\frac{\text{ch } x}{\text{sh } x} - \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}\right) dx = \ln \text{sh } x - \ln \text{ch } x + C =$$

$$= \ln \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} + C = \ln \ \text{th } x + C$$

4.104. Az előző példa alapján nagyon egyszerűen kapjuk az eredményt a következő átalakítás után:

$$\int \frac{dx}{\text{sh } x} = \int \frac{dx}{2 \text{ sh } \frac{x}{2} \text{ ch } \frac{x}{2}} = \ln \ \text{th } \frac{x}{2} + C$$

De akkor sem okoz gondot a megoldás, ha sh x helyébe $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ kifejezést írjuk, vagy ha sh x-el való szorzás és osztás után

$$\frac{\text{sh } x}{\text{ch}^2 - 1}$$

integrálására alkalmazzuk az $u = \text{ch } x$ helyettesítést.

4.105.

$$\text{ch } \alpha \cdot \text{ch}\beta = \frac{1}{2}\left[\text{ch}(\alpha+\beta) + \text{ch}(\alpha-\beta)\right]$$

összefüggés alapján

$$\int \text{ch } x \cdot \text{ch } 2x \cdot \text{ch } 3x dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (\text{ch } 6x + \text{ch } 4x + \text{ch } 2x + 1) dx = \frac{1}{24} \text{ sh } 6x + \frac{1}{16} \text{ sh } 4x + \frac{1}{8} \text{ sh } 2x + \frac{1}{4} x + C$$

4.106.

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\, dx = \int \frac{u^2}{u+1} \cdot \frac{du}{u} = \int \frac{u}{u+1} du = \int (1 - \frac{1}{u+1}) du = u - \ln(u+1) + C = (*)$$

$$u = e^x \qquad x = \ln u \qquad dx = \frac{1}{u} du$$

$$(*) = e^x - \ln(e^x + 1) + C$$

4.107.

$$\int \frac{6}{e^x-3}\,dx = \int \frac{6}{(\mathrm{u}-3)u}\,du = \int \left(-\frac{2}{u}+\frac{2}{u-3}\right)du = 2\ln\frac{e^x-3}{e^x}+C$$

$$e^x = u \qquad x = \ln u \qquad dx = \frac{1}{u}du$$

4.108. A parciális integrálás alkalmazható, de a megoldás ilyen módon sokkal hosszabb, mintha sh $3x$-et e^x-el fejezzük ki, ezért ezt a megoldást ajánljuk hasonló esetekben is.

$$\int e^x \cdot \text{ sh } 3x\;dx = \int e^x\cdot\frac{e^{3x}-e^{-3x}}{2}dx = \int \frac{e^{4x}-e^{-2x}}{2}dx = \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{4x}+\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-2x}+C$$

4.109.

4.110.

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x+5}}\,dx = \int \frac{\frac{u^2-5}{3}}{u}\cdot\frac{2}{3}udu = \frac{2}{9}\int (u^2-5)du = \frac{2}{9}\left(\frac{u^3}{3}-5u\right)+C = (*)$$

$$u=\sqrt{3x+5}\;; \qquad 3x+5=u^2\;; \qquad x=\frac{u^2-5}{3}\;; \qquad dx=\frac{2}{3}udu$$

$$(*) = \frac{2}{27}\sqrt{(3x+5)^3}-\frac{10}{9}\sqrt{3x+5}+C = \frac{2}{27}\sqrt{3x+5}\cdot(3x-10)+C$$

4.111.

$$\int (x^2-3x+2)\cdot\sqrt{2x-1}\;dx = \int \left(\frac{u^4+2u^2+1}{4}-3\cdot\frac{u^2+1}{2}+2\right)u\cdot udu = (*)$$

$$u=\sqrt{2x-1}\;; \qquad u^2=2x-1\;; \qquad x=\frac{u^2+1}{2}\;; \qquad dx=udu$$

$$(*) = \frac{1}{4}\int (u^6-4u^4+3u^2)du = \frac{1}{4}\left(\frac{u^7}{7}-\frac{4u^5}{5}+u^3\right)+C =$$

$$= \frac{1}{28}\sqrt{(2x-1)^7}-\frac{1}{5}\sqrt{(2x-1)^5}+\frac{1}{4}\sqrt{(2x-1)^3}+C$$

4.112. A feladatot kisebb lépésekben kétszeri helyettesítéssel is megoldhatjuk. Előbb $e^x=t$, majd pedig $u=\sqrt{t+1}$ helyettesítést alkalmazva racionális törtfüggvény integrálására vezetjük vissza.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \int \frac{dt}{t\cdot\sqrt{t+1}} = \int \frac{2u}{(u^2-1)u}du = 2\int \frac{du}{u^2-1} =$$

$$= -2\;\text{arth}\;u+C = -\ln\frac{1+u}{1-u}+C =$$

$$t=e^x\;; \qquad x=\ln t\;; \qquad dx=\frac{1}{t}dt; \qquad u=\sqrt{t+1}\;; \qquad t=u^2-1\;; \qquad dt=2udu$$

$$= \ln \frac{1-u}{1+u} + C = \ln \frac{1-\sqrt{e^x+1}}{1+\sqrt{e^x+1}} + C$$

Természetesen rövidebb lesz a megoldás (és azért általában így is járunk el), ha a két helyettesítést összevonva egy megfelelő helyettesítést alkalmazunk.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \int \frac{2u}{u(u^2-1)} du = 2 \int \frac{du}{u^2-1}$$

(A folytatás azonos.)

$$\sqrt{e^x+1} = u \qquad e^x = u^2 - 1 \qquad x = \ln(u^2-1) \qquad dx = \frac{2u}{u^2-1} du$$

4.113.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{u^4}{1+u^3} \cdot 6u^5 du =$$

$$x = u^6 \qquad dx = 6u^5 du \qquad u = \sqrt[6]{x}.$$

A gyökkitevők legkisebb közös többszöröse lesz a helyettesítendő kifejezés gyökkitevője.)

$$6 \int \frac{u^9}{u^3+1} du = 6 \int \left(u^6 - u^3 + 1 - \frac{1}{u^3+1} \right) du = \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{3}{4}\sqrt[6]{x^4} + 6\sqrt[6]{x} - 2\ln(\sqrt[6]{x}+1) +$$

$$+ \ln\left(\sqrt[6]{x^2} - \sqrt[6]{x} + 1\right) - 2\sqrt{3} \text{ arc tg } \frac{2\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{3}} + C = \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2} + 6\sqrt[6]{x} + \frac{\ln \sqrt[6]{x^2} - \sqrt[6]{x} + 1}{\ln \sqrt[6]{x^2} + 2\sqrt[6]{x} + 1} -$$

$$-2\sqrt{3}\text{arctg } \frac{2\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{3}} + C$$

4.114.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} = \int \frac{4u^3}{u^2+u} du = 4 \int \frac{u^2}{u+1} du = 4 \int (u - 1 + \frac{1}{u+1}) du =$$

$$2u^2 - 4u + 4\ln(u+1) + C =$$

$$x = u^4 \qquad dx = 4u^3 du$$

$$= 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln(\sqrt[4]{x}+1) + C$$

4.115.

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x} = -\int \frac{4u^2}{(1+u^2)^2} \cdot \frac{1+u^2}{1-u^2} du = -4 \int \frac{u^2}{(1+u^2)(1-u^2)} du =$$

$$= \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} + \frac{0 \cdot u + 2}{u^2+1} \right) du = (*)$$

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = u \ ; \qquad \frac{1-x}{1+x} = u^2 \ ; \qquad x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \ ; \qquad dx = \frac{-4u}{(1+u^2)^2} du$$

$$(*) = \ln(u-1) - \ln(u+1) + 2\text{arctg }u + C = \ln\frac{u-1}{u+1} + 2\text{arctg }u + C =$$

$$= \ln\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1} + 2\text{ arc tg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C = \ln\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}} + 2\text{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C$$

4.116. $x^2 = t$ helyettesítéssel a gyökjel alatt már lineáris kifejezés lesz, tehát így sikerült a feladatot az előzőkben tárgyalt típusra visszavezetni. Az eljárás azért alkalmazható a jelen esetben, mert a számlálóban x^3dx áll, ami így írható $x^2 \cdot xdx$. Itt x^2 helyébe t, xdx helyébe pedig $\frac{1}{2}dt$ írható.

Gyakorlásképpen oldjuk meg a feladatot ilyen bontásban is. Tekintettel azonban arra, hogy az így nyert integrált egy újabb helyettesítéssel racionalizáljuk, joggal merül fel az az igény, hogy lehetőleg egyetlen helyettesítéssel oldjuk meg a feladatot. Ez lehetséges

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x^2}}\,dx = \int\frac{x^2\cdot x}{\sqrt{1+2x^2}}\,dx = \frac{1}{4}\int\frac{\frac{u-1}{2}}{\sqrt{u}}du = \frac{1}{8}\int\frac{u-1}{\sqrt{u}}du = \frac{1}{8}\int\left(\sqrt{u}-\frac{1}{\sqrt{u}}\right)du =$$

$$1+2x^2 = u \qquad du = 4xdx \qquad x^2 = \frac{u-1}{2}$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{2}{3}\sqrt{u^3} - 2\sqrt{u}\right) + C = \frac{1}{12}\sqrt{1+2x^2}\cdot(1+2x^2-3) + C = \frac{1}{6}\sqrt{1+2x^2}\cdot(x^2-1) + C$$

4.117.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^2+1}} = \frac{1}{3}\text{ arsh }(3x-1) + C$$

4.118.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{-(9x^2-12x+2)}} = \int\frac{dx}{\sqrt{-\left[(3x-2)^2-4+2\right]}} =$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2-(3x-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{3x-2}{\sqrt{2}}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\arcsin\frac{3x-2}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-2}{\sqrt{2}} + C$$

4.119.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-4}} = \int\frac{dx}{\sqrt{-(3x-2)^2}}$$

A gyökjel alatti kifejezés az $x = \frac{2}{3}$ hely kivételével (amikor is 0) mindenütt negatív, ezért belőle négyzetgyök nem vonható. Az integrálandó függvény tehát sehol nincs értelmezve (még az $x = \frac{2}{3}$ helyen sem, mert ott a nevező 0).

4.120.

$$\int \sqrt{1+2x-x^2}\ dx = \int \sqrt{1-(x^2-2x)}dx = \int \sqrt{1-[(x-1)^2-1]}dx =$$

$$= \int \sqrt{2-(x-1)^2}dx = \sqrt{2}\cdot \int \sqrt{1-\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2}dx =$$

$$\sqrt{2}\int \sqrt{1-\sin^2 u}\sqrt{2}\cos u du = 2\cdot \int \cos u \cdot \cos u du =$$

$$\frac{x-1}{\sqrt{2}} = \sin u\ ; \qquad x = \sqrt{2}\sin u + 1\ ; \qquad dx = \sqrt{2}\cos u du$$

$$= 2\cdot \int \cos^2 u du = 2\cdot \int \frac{1+\cos 2u}{2}du = u + \frac{1}{2}\sin 2u + C$$

A visszahelyettesítéshez egyrészt

$$\frac{x-1}{\sqrt{2}} = \sin u$$

kifejezésből felírjuk, hogy

$$u = \arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}},$$

másrészt $\sin 2u$-t kifejezzük $\sin u$-val, mert $\sin u$ helyébe $\frac{x-1}{\sqrt{2}}$ írható

$$\frac{1}{2}\sin 2u = \sin u\cdot\cos u = \sin u\cdot\sqrt{1-\sin^2 u} =$$

$$\frac{x-1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{x-1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{x^2-2x+1}{2}}$$

tehát

$$\int \sqrt{1+2x-x^2}\ dx = \arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}} + \frac{x-1}{2}\sqrt{1+2x-x^2} + C$$

4.121.

$$\int \sqrt{3x^2-3x+1}dx = \sqrt{3}\cdot\int\sqrt{x^2-x+\frac{1}{3}}dx = \sqrt{3}\cdot\int\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{12}}dx =$$

$$= \int\sqrt{\left(\sqrt{3}x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}dx = \frac{1}{2}\int\sqrt{(2\sqrt{3}x-\sqrt{3})^2+1}dx = (*)$$

$$2\sqrt{3}x-\sqrt{3} = \text{sh}\ t\ ; \qquad x = \frac{\text{sh}\ t+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\ ; \qquad dx = \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\text{ch}\ tdt$$

$$(*) = \frac{1}{2}\int\sqrt{\text{sh}^2 t+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\text{ch}\ tdt = \frac{1}{4\sqrt{3}}\int\text{ch}^2 tdt = \frac{1}{4\sqrt{3}}\int\frac{\text{ch}\ 2t+1}{2}dt =$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{3}}\left(\frac{\text{sh } 2t}{2} + t\right) + C = \frac{1}{8\sqrt{3}}\left(\text{sh } t \cdot \sqrt{1 + \text{sh}^2 t} + t\right) + C =$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{3}}\left[\sqrt{3}(2x-1)\sqrt{1 + 3(2x-1)^2} + \text{arsh } \sqrt{3} \cdot (2x-1)\right] + C =$$

$$= \frac{1}{8}(2x-1)\sqrt{12x^2 - 12x + 4} + \frac{1}{8\sqrt{3}} \text{ arsh } \sqrt{3} \cdot (2x-1) + C =$$

$$= \frac{2x-1}{4}\sqrt{3x^2 - 3x + 1} + \frac{1}{8\sqrt{3}} \text{ arsh } \sqrt{3} \cdot (2x-1) + C$$

4.122.

$$\int \sqrt{x^2 + 6x + 10}\ dx = \frac{x+3}{2}\sqrt{x^2 + 6x + 10} + \frac{1}{2} \text{ arsh } (x+3) + C$$

4.123.

$$\int \sqrt{3 - x^2}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{3 - x^2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

4.124.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 40}} = \text{arsh } \frac{x-2}{6} + C$$

4.125.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 12x + 30}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ arsh } \frac{x+2}{\sqrt{6}} + C$$

4.126.

$$\int \sqrt{2x^2 + 8x + 5}dx = \frac{x+2}{2}\sqrt{2x^2 + 8x + 5} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \text{ arch } \left[\sqrt{\frac{2}{3}}(x+2)\right] + C$$

4.127.

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{4 + x - x^2}}dx = \frac{31}{8} \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{17}} - \frac{2x+7}{4}\sqrt{4 + x - x^2} + C$$

Improprius integrálok

$\boxed{\textbf{4.201.}}$

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\int_2^\omega \frac{1}{x^2} = \lim_{\omega\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_2^\omega = \lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{1}{'}omega + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}.$$

$\boxed{\textbf{4.202.}}$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\int_1^\omega \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\omega\to\infty}(\ln\omega - \ln 1).$$

Mivel $\lim_{\omega\to\infty}\ln\omega = \infty$, ezért a fenti integrál divergens.

4.203.

$$\frac{\pi}{2}$$

4.204.

$$5\pi.$$

4.205.

$$-\frac{4}{e^3}.$$

4.206.

$$9e^{10}.$$

4.207. Divergens.

4.208.

$$\frac{1}{36}.$$

4.210.

$$\frac{1}{2e}.$$

4.211.

$$\sqrt{2}.$$

4.212.

$$1.$$

$\boxed{\textbf{4.213.}}$

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{1-x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\ln(1-x)\right]_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(-\ln\varepsilon + \ln 1,$$

tehát divergens.

$\boxed{\textbf{4.214.}}$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(-2\sqrt{\varepsilon}+2) = 2.$$

$\boxed{\textbf{4.215.}}$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2x-1}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 \frac{1}{2x-1}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{2}\ln(2x-1)\right]_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(\frac{1}{2}\ln\varepsilon - \frac{1}{2}\ln 1),$$

tehát divergens.

4.216.

$$1.$$

$\boxed{\textbf{4.217.}}$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

4.218.

$$\frac{\pi}{2}.$$

4.219.

$$\frac{2\sqrt{11}}{3}.$$

4.220.

$$-\frac{\pi}{4}.$$