

# IV. INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

## Feladatok

2009. november

## Határozatlan integrálás

### Elemi függvények integrálja

4.5.

$$\int \frac{dx}{x^2}$$

4.6.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

4.7.

$$\int x^2 (x^2 - 1) dx$$

4.8.

$$\int (x^2 - 1)^2 dx$$

4.9.

$$\int \frac{\sqrt{x} - x + x^4}{x^2} dx$$

4.11.

$$\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx$$

4.14.

$$\int \frac{1 + 2x^2}{x^2(1 + x^2)} dx$$

4.15.

$$\int \frac{6}{5 + 5x^2} dx$$

4.16.

$$\int \frac{\ln 2}{\sqrt{2 + 2x^2}} dx$$

4.18.

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$$

4.19.

$$\int 3x^5 dx$$

4.20.

$$\int \frac{x^2 - 7x + 8}{x^2} dx$$

Integrálás helyettesítéssel.

4.21.

$$\int e^{-x} dx$$

4.22.

$$\int \cos(4x - 5) dx$$

4.23.

$$\int \sqrt{8 - 2x} dx$$

4.24.

$$\int \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) dx$$

4.25.

$$\int 10^x \cdot e^x dx$$

4.26.

$$\int \frac{dx}{5 + x^2}$$

4.27.

$$\int \frac{3}{\sqrt{3x^2 - 2}} dx$$

4.30.

$$\int x\sqrt{1 - x^2} dx$$

4.32.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

4.33.

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$$

4.34.

$$\int x \sin(x^2 + 2) dx$$

4.36.

$$\int \frac{x}{4 + x^2} dx$$

4.37.

$$\int \frac{dx}{x \ln x}$$

4.38.

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$$

4.39.

$$\int \frac{x + 2}{2x - 1} dx$$

4.40.

$$\int \frac{x^4}{1 - x} dx$$

4.41.

$$\int \frac{x}{x^4 + 1} dx$$

4.42.

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} dx$$

4.44.

$$\int \frac{3x - 1}{x^2 + 9} dx$$

4.45.

$$\int \sin 8x \, dx$$

4.46.

$$\int \frac{1}{3x-5} \, dx$$

4.47.

$$\int e^{5x+7} \, dx$$

4.48.

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx$$

4.49.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^3}} \, dx$$

4.50.

$$\int \operatorname{tg} x \, dx$$

4.51.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+1)} \, dx$$

### Parciális integrálás.

4.53.

$$\int \left( \frac{x+2}{e^x} \right)^2 \, dx$$

4.55.

$$\int x^3 e^{-x^2} \, dx$$

4.57.

$$\int x \cdot \sin x \cdot \cos x \, dx$$

4.59.

$$\int x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx$$

4.60.

$$\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x} \, dx$$

4.61.

$$\int \ln^3 x \, dx$$

4.62.

$$\int (\operatorname{arc} \sin x)^2 \, dx$$

4.63.

$$\int e^{3x} \cos 2x \, dx$$

4.64.

$$\int e^{\operatorname{arc} \sin x} \, dx$$

### Racionális törtfüggvények integrálása.

4.65.

$$\int \frac{x-2}{x^2-7x+12} \, dx$$

4.66.

$$\int \frac{3x-2}{x^2+4x+8} \, dx$$

4.67.

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$$

4.68.

$$\int \frac{x}{x^4 - 3x^2 + 2} dx$$

4.70.

$$\int \frac{4x + 3}{(x - 2)^3} dx$$

4.71.

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 5}{(x - 2)^4} dx$$

4.72.

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3(x - 2)^2} dx$$

4.73.

$$\int \frac{dx}{x^4 - x^2}$$

4.74.

$$\int \frac{dx}{x^6 + x^4}$$

4.75.

$$\int \frac{x}{x^3 - 1} dx$$

4.76.

$$\int \frac{x^2}{1 - x^4} dx$$

4.77.

$$\int \frac{dx}{(x + 1)^2(x^2 + 1)}$$

4.78.

$$\int \frac{1}{1 + x^4} dx$$

4.79.

$$\int \frac{x(1 - x^2)}{1 + x^4} dx$$

4.80.

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 9)^3}$$

4.81.

$$\int \frac{1}{(x - 3)^4} dx$$

4.82.

$$\int \frac{2}{x - 5} dx$$

4.83.

$$\int \frac{x - 3}{x^2 - 6x + 27} dx$$

4.84.

$$\int \frac{x - 1}{x^2 - 6x + 27} dx$$

4.85.

$$\int \frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x} dx$$

Trigonometrikus függvények integrálása.

4.86.

$$\int \cos^5 x dx$$

4.87.

$$\int \sin^6 x dx$$

4.88.

$$\int \sin^6 x \cos^3 x \, dx$$

4.89.

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} \, dx$$

4.90.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} \, dx$$

4.91.

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$$

4.92.

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

4.93.

$$\int \frac{dx}{5 - 3 \cos x}$$

4.94.

$$\int \operatorname{tg}^5 x \, dx$$

4.95.

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^4 x}$$

4.96.

$$\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x} \, dx$$

4.97.

$$\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$$

4.98.

$$\int \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \, dx$$

4.99.

$$\int \sin 3x \cdot \cos \left( 5x - \frac{\pi}{2} \right) \, dx$$

4.100.

$$\int \sqrt{1 + \sin x} \, dx$$

### Hiperbolikus és $R(e^x)$ függvények integrálása.

4.101.

$$\int \operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^3 x \, dx$$

4.102.

$$\int \frac{\operatorname{sh}^3 x}{\sqrt{\operatorname{ch} x}} \, dx$$

4.103.

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x}$$

4.104.

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$$

4.105.

$$\int \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} 2x \cdot \operatorname{ch} 3x \, dx$$

4.106.

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} \, dx$$

4.107.

$$\int \frac{6}{e^x - 3} dx$$

4.108.

$$\int e^x \cdot \operatorname{sh} 3x dx$$

4.109.

$$\int e^x \cdot \operatorname{sh} x dx$$

### Irracionális függvények integrálása.

4.110.

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x+5}} dx$$

4.111.

$$\int (x^2 - 3x + 2) \cdot \sqrt{2x-1} dx$$

4.112.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$$

4.113.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}} dx$$

4.114.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$$

4.115.

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x}$$

4.116.

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x^2}} dx$$

4.117.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$$

4.118.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}$$

4.119.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-4}}$$

4.120.

$$\int \sqrt{1+2x-x^2} dx$$

4.121.

$$\int \sqrt{3x^2-3x+1} dx$$

4.122.

$$\int \sqrt{x^2+6x+10} dx$$

4.123.

$$\int \sqrt{3-x^2} dx$$

4.124.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+40}}$$

4.125.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+12x+30}}$$

4.126.

$$\int \sqrt{2x^2+8x+5} dx$$

4.127.

$$\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{4+x-x^2}} dx$$

## Határozott integrálás

4.128.

$$\int_0^2 x e^x dx$$

4.129.

$$\int_0^{\sqrt{3}} 2x \arctan x dx$$

4.130.

$$\int_2^3 \frac{1}{(2x+1)^2} dx$$

4.131.

$$\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{5x-4}} dx$$

### Trigonometrikus integrálok.

4.132.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x dx$$

4.133.

$$\int_0^{\pi} \sin^3 x dx$$

4.134.

$$\int_{\pi}^{2\pi} \cos^2 x \sin^3 x dx$$

4.135.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x} dx$$

4.136.

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx$$

4.137.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^4 x \sin^2 x dx$$

4.138.

$$\int_0^{\pi} \sin 4x \cos 5x dx$$

### Improprius integrálok

4.139.

$$\int_{1/2}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

4.140.

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2} dx$$



4.141.

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x-1} dx$$

4.142.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$$

4.143.

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx$$

4.144.

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} dx, \quad a > 0$$

4.145.

$$\int_0^{\infty} x e^{-ax} dx$$

4.146.

$$\int_0^{\infty} \cos x e^{-x} dx$$

4.147.

$$\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$$

4.148.

$$\int_{2/\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$$

4.149.

$$\int_0^{\infty} \sin(ax) e^{-bx} dx$$

4.150.

$$\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$$

4.151.

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx$$

### Helyettesítéses integrálok

4.152.

$$\int_0^1 x \cdot e^{-x^2} dx$$

4.153.

$$\int_1^{e^{\pi/2}} \frac{\cos \ln x}{x} dx$$

4.154.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

4.155.

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

### Parciális integrálás

4.156.

$$\int (x^2 - 1) \sin 3x \, dx$$

4.157.

$$\int \left( \frac{x+2}{e^x} \right)^2 dx$$

4.158.

$$\int x^2 a^x \, dx$$

## Improprius integrálok

4.201-4.220.: Számolja ki az alábbi improprius integrálok értékét!

4.201.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

4.212.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}} dx$$

4.202.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

4.213.

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx$$

4.203.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

4.214.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$$

4.204.

$$\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{5}{x^2 - 2x + 2} dx$$

4.215.

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2x-1} dx$$

4.205.

$$\int_{-\infty}^{-3} xe^x dx$$

4.216.

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{2x-1}} dx$$

4.206.

$$\int_{-\infty}^{10} xe^x dx$$

4.217.

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

4.207.

$$\int_4^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$$

4.218.

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$$

4.208.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(1+2x)^3} dx$$

4.219.

$$\int_{\frac{4}{3}}^5 \frac{dx}{\sqrt{3x-4}}$$

4.210.

$$\int_1^{\infty} e^{-2x+1} dx$$

4.220.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

4.211.

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(x-1)^3}} dx$$

## Területszámítás

4.221-4.240. Határozza meg a következő függvények görbéi alatti területet az adott intervallumban, és ábrázolja a függvényeket!

$$4.221. y = \frac{3x^2}{2}; \quad -2 \leq x \leq 2$$

$$4.230. y = \cos\left(\frac{x}{2}\right); \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$4.222. y = \frac{5}{3x^2} + x; \quad 1 \leq x \leq 3$$

$$4.231. y = \cosh(2x); \quad 0 \leq x \leq 3$$

$$4.223. y = \sqrt{x}; \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$4.232. y = \sinh(x); \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$4.224. y = (1-x)^3; \quad -2 \leq x \leq 1$$

$$4.233. y = \frac{2}{x}; \quad -2 \leq x \leq -1$$

$$4.225. y = x^3 - 3; \quad 3 \leq x \leq 4$$

$$4.234. y = \frac{1}{1-x}; \quad 2 \leq x \leq 3$$

$$4.226. y = x^4 - x^3; \quad 1 \leq x \leq 2$$

$$4.235. y = \frac{1}{2x-5}; \quad 3 \leq x \leq 4$$

$$4.227. y = e^{2x}; \quad -0.5 \leq x \leq 1$$

$$\boxed{4.228.} y = \sin(3x); \quad 0.0 \leq x \leq 0.3$$

$$4.236. y = \frac{1}{2x-5}; \quad 1 \leq x \leq 2$$

$$4.229. y = \cos(3x); \quad -0.5 \leq x \leq 0.5$$

4.237. Határozzuk meg  $x$  értékét úgy, hogy az  $y = \frac{1}{4}$  alatti terület  $[a, b]$  és  $[c, x]$  szakaszhoz tartozó része egyenlő legyen! Mennyi az  $x$ , ha  $c = 2a, c = 3a$ ?

4.238. Határozzuk meg  $x$  értékét úgy, hogy az  $y = \frac{1}{1+x^2}$  görbe alatti terület 0-tól  $x$ -ig terjedő szakasza  $\frac{12}{5}$ -del legyen egyenlő!

4.239. Határozzuk meg  $x$  értékét úgy, hogy az  $y = e^{-2x}$  görbe alatti terület  $x$ -től 1-ig terjedő szakasza 3-mal legyen egyenlő!

4.230. Határozzuk meg  $x$  értékét úgy, hogy az  $y = \sin(x)$  alatti terület 0-tól  $x$ -ig terjedő szakasza  $\frac{1}{4}$ -del legyen egyenlő!

4.241-4.252. Határozza meg a következő görbék közötti területet és ábrázolja is a görbéket!

$$4.241. y = x^2 \quad \text{és} \quad y = 2x$$

$$\boxed{4.243.} y = x^2 \quad \text{és} \quad y = 1 - x^2$$

$$4.242. y = \sqrt{x} \quad \text{és} \quad y = \frac{2}{x}$$

$$4.244. y = x^2 \quad \text{és} \quad y = 1 - 3x^2$$

- 4.245.  $y = x^2$  és  $y = \sqrt{\frac{2}{x}}$       4.249.  $y = \frac{1}{x}$  és  $y = 2.5 - x$
- 4.246.  $y = x^2$  és  $y = 3x$       4.250.  $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = 1$  és  $y = 1 - x$
- 4.247.  $y = \frac{x^2}{3}$  és  $y = 2 + \frac{x}{3}$       4.251.  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$  és  $x + y = 1$
- 4.248.  $y = x^4$  és  $y = 3x^2 - 2$       4.252.  $y = \sin(x)$  és  $y = \frac{2}{x}$

**4.253-4.258. Végezze el az alábbi területszámításokat!**

- 4.253. Határozzuk meg az  $y = x(1 - x)$  parabola és ennek az  $x = 0, x = 2$  abszcisszájú pontjaihoz húzott érintői közötti területet!
- 4.254. Határozzuk meg az  $y = 4.5 - \frac{1}{2}(x - 4)^2$  parabola, és ennek az  $x = 3$  és  $x = 6$  pontjában húzott érintői közötti területet!
- 4.255. Határozzuk meg az  $y = \frac{1}{x}$  hiperbola, és a  $P(2, 2)$  pontra illeszkedő,  $y = x$  egyenesre merőleges egyenes által határolt síkidom területét.
- 4.256. Határozzuk meg az  $y = \frac{1}{x}$  hiperbola, az  $y = x$  és az  $y = a^{\frac{1}{2}} * x$  egyenes által határolt síkidom területét! Ábrázoljuk is a szektort!
- 4.257. Igazoljuk általánosan, hogy a parabolaszélet területe egyenlő a körülvevő paralelogramma területének  $\frac{2}{3}$  részével!
- 4.258. igazoljuk, hogy a bevonalkázott parabolaszélet-terület a húr, az x tengely és az érintő htárolta OAB háromszög területének  $\frac{2}{3}$ -a!

## Görbe ívhossza

Határozza meg az adott függvények görbéjének ívhosszát a megadott határok között!

- 4.259.  $y = x^2$ ;  $1 \leq x \leq 4$       4.262.  $y = \ln(\sin x)$ ;  $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
- 4.260.  $y = \cosh(x)$ ;  $0 \leq x \leq 3$       4.263.  $x^2 + y^2 = 25$ ;  $0 \leq x \leq 5$
- 4.261.  $y = \ln(x)$ ;  $2 \leq x \leq 6$       4.264.  $x = 5 \cos(t)$ ;  $y = 5 \sin(t)$ ;  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$4.265. \quad x = a(t - \sin t); y = a(1 - \cos t); \quad t \leq 2$$

$$4.266. \quad x = 5 \cos^3 t; y = 5 \sin^3 t; \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$$

$$4.267. \quad x = 2t; y = 3t^2; \quad 2 \leq t \leq 5$$

## Forgástestek térfogata

Számítsa ki a következő paraméteresen megadott függvények forgástesteinek térfogatát!

$$4.268. \quad x = a \cos(t), y = a \sin(t); \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$4.269. \quad x = a(t - \sin t), y = a(t - \cos t); \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$4.270. \quad x = e^t, y = t; \quad 1 \leq t \leq 2$$

$$4.271. \quad x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t; \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Forgassa meg a következő görbéket az  $x$  tengely körül, és határozza meg a keletkező forgásfelületek és a megadott intervallumok végpontjaiban az  $x$  tengelyre állított merőleges síkok határolta térrész térfogatát!

$$4.272. \quad y = e^{2x}; \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$4.277. \quad y^2 - x^2 = 1; \quad 0 \leq x \leq 3$$

$$4.273. \quad y = \frac{1}{\sqrt{x}}; \quad 1 \leq x \leq 4$$

$$4.278. \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1; \quad 1 \leq x \leq 4$$

$$4.274. \quad y = \frac{x^3}{3}; \quad 1 \leq x \leq 2$$

$$4.279. \quad y = \cos^2 x; \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$4.275. \quad y = x - \frac{1}{x}; \quad 1 \leq x \leq 3$$

$$4.280. \quad y = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}; \quad 1 \leq x \leq 3$$

$$4.276. \quad y = 1 - x^2; \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$4.281. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad -a \leq x \leq a$$